Aufgabe 1: (12 Punkte)

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 3u_{xx} &= \sin(\pi x) + \cos(t) + x\left(1 - \frac{1}{3}\cos(t)\right) && \text{für } x \in (0,3), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - \cos(2\pi x) && \text{für } x \in (0,3), \\ u(0,t) &= \sin(t), \quad u(3,t) = 3t && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

a) Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine inhomogene Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 3v_{xx} &= \sin(\pi x) && \text{für } x \in (0,3), t > 0, \\ v(x,0) &= 1 - \cos(2\pi x) && \text{für } x \in (0,3), \\ v(0,t) &= 0, \quad v(3,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Die folgende Beziehung darf ohne eigenen Beweis verwendet werden:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 \cos(2\pi x)\sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2k(1-\cos(k\pi))}{\pi(k^2-36)} \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ und $0 < t < \frac{1}{2}$

$$u_t + t \cdot u_x = u^2 \cdot \left(1 + e^{-t}\right)$$

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Ist Ihre Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 < t < 0.5$ definiert? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.