Aufgabe 1:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + \frac{2xy}{1+x^2} u_y = 0 \quad \text{mit} \quad u(0,y) = \cos y\,.$$

b) Man schreibe folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise und bestimme den Typ

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

c) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man den Wert $u(1,0)$ der Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + y^2 < 1\,, \\ u(x,y) &= 1 + x + y \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreisring

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 3 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,, \\ u(r,0) = 0 \quad &\text{und} \quad u(r,\pi) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le r \le 3\,, \\ u(1,\varphi) = 2\sin(\varphi) \quad &\text{und} \quad u(3,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi, \end{aligned}$$

und bestimme deren maximalen und minimalen Funktionswert.

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

b) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{-x^2}\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= 3 - x^2\,, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und gebe den Abhängigkeitsbereich zum Punkt $(x_0, t_0) = (1,1)$ an.