

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & 0 < x < 2\pi, & \quad 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, \pi) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq 2\pi \\ u(0, y) &= y(\pi - y), & u(2\pi, y) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq \pi\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 14:

- a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im \mathbb{R}^2 invariant gegenüber Drehungen ist, d.h. für die um den Winkel φ gedrehten Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

- b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 25,$$

$$u(x, y) = xy \quad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

den Wert $u(1, 1)$.

Aufgabe 15:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreis $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 7$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$u(7, \varphi) = 3 - \cos \varphi + 2 \sin \varphi + 4 \cos(3\varphi) - 5 \sin(3\varphi).$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 16:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreisring

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 2 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r, \pi) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq r \leq 2,$$

$$u(1, \varphi) = \sin(2\varphi) \quad \text{und} \quad u(2, \varphi) = -\sin(4\varphi) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Abgabetermin: 21.5.- 25.5. (zu Beginn der Übung)