Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben für $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $u_t + 4u_x = 0\,, \qquad u(x,0) = e^{-x^2}$

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem und zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x,t) = (1,0)$ und $(x,t) = (2,0)$. (Aufgabe 1b, Klausur 09/10)

$$\begin{aligned} xu_t - tu_x &= 0 & & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,. \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2} & & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + a(x,t)u_x = b(x,t) \qquad & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x) \qquad & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen a, b, g. Die Charakteristiken seien (wie in der Vorlesung definiert) die Lösungen der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,(x(t),t)\,, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung entlang dieser Charakteristiken durch

$$u\,(x(t),t) = g(x(0)) + \int_0^t b\,(x(\tau),\tau)\,d\tau$$

gegeben ist.

b) Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t - 4e^{-x}u_x &= 1 \qquad & x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= x & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(i) mit Hilfe von a)

(ii) mit der Methode aus der Vorlesung. (Aufgabe 1a, Klausur 09/10)

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,y)$ der folgenden Differentialgleichung

$$x u_x + \frac{y}{2} u_y = u\,,$$

die die Anfangskurve

$$c_0(t) \;=\; (1, t, 1+t^2)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

enthält.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$2u_t + x^2 u_x = \frac{1}{u}, \qquad u(x,0) = 2\sqrt{e^{-4x^2}} \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$?

Wenn nicht, kann die Lösung in den Definitionslücken stetig ergänzt werden?

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine stetige Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, \qquad & x, t > 0 \\ u(x,0) &= x & (x \ge 0) \\ u(0,t) &= t & (t \ge 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$, $(\forall x)$ bzw. zur Randbedingung $u(0,t) = t$, $(\forall t)$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene Lösung für alle $x, t \ge 0$ partiell differenzierbar?

Freiwillige Zusatzaufgabe : Wer mag, kann die Aufgabe auch mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t lösen. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.

Abgabetermine: 26.04.11