Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2011**
Prof. Dr. H.J. Oberle
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben 12.04.2011

Aufgabe 1:

a) Sei λ eine beliebige, fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine Darstellung der allgemeinen reellen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0$$

nichttriviale Lösungen?

Aufgabe 2:
Gegeben sei die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_t = g(t, x)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \neq 0$.

Transformieren Sie die Differentialgleichung über

$$\nu := bx + at\;,\; \mu := bx - at$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung. Tipp: Führen Sie die Funktion $\tilde{u}$ mit

$$u(t, x) = \tilde{u}(\nu(t, x), \mu(t, x)) =: \tilde{u}(\nu, \mu)$$

ein und verwenden Sie die Kettenregel aus Analysis III.

Aufgabe 3:
Lösen Sie mit Hilfe der Substitution aus Aufgabe 2) folgende Anfangswertaufgaben

a)
$$u_t + 4u_x = 64t + 16x + 8 \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = 2x,$$

b)
$$u_t + 3u_x = 6e^{x-3t} \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = xe^x.$$

Aufgabe 4: Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluss von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. Es ist üblich, nicht einzelne Fahrzeuge zu beobachten, sondern den Gesamtfluss. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$u(x,t)$ = (Längen-)Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluss = Anzahl Fahrzeuge, die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren $= u(x,t) \cdot v(x,t)$.

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und dass keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Sei $N(t) :=$ Anzahl Fahrzeuge auf einem Ortsintervall [a,b] zum Zeitpunkt t. Machen Sie sich klar, dass dann einerseits

$$N(t) = \int_a^b u(x,t)\,dx$$

gilt und andererseits

$$N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^t q(a,\tau) - q(b,\tau)d\tau\,.$$

Leiten Sie hieraus die sogenannte Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge)

$$u_t + q_x = 0$$

her.

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Geschwindigkeit nur von der Dichte abhängt: $v = v(u)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die Erhaltung der Masse beschreibt.

c) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte wächst und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) = c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

d) Lösen Sie die Aufgabe aus Teil c) mit $c = 2$ und $u(x,0) = e^{-x^2}$ mit Hilfe der Substitution aus Aufgabe 2.