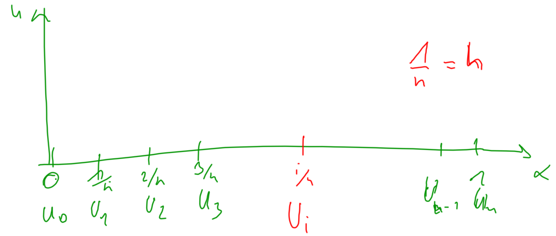
Vo DGl II 7.7.2010

Numerik der Poissongl.

$$U_i \approx u(x_i) = u\left(\tfrac{i}{n}\right)$$

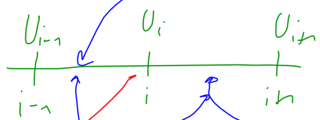
$$\frac{1}{n} = h$$



RB. $\quad -u_{xx} = f$

$$u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow U_0 = 0,\ U_n = 0$$

$u_{xx} \approx$



$$\frac{U_i - U_{i-1}}{h} \approx u_x(\ \ )$$

$$\frac{U_{i+1} - U_i}{h} \approx u_x(\ \ )$$

$$u_{xx}(\ \ ) \approx \frac{u_x(\ \ ) - u_x(\ \ )}{h}$$

$$= \frac{\frac{U_{i+1} - U_i}{h} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}}{h} =$$

$$= \boxed{\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}}$$

$$-u_{xx} = f \qquad\qquad f(x_i) = F_i$$

$$\frac{-U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1}}{h^2} = F_i \qquad i = 1, \dots, n-1$$

RB

$$-U_2 + 2U_1 - \underbrace{U_0}_{=0} = h^2 F_1$$

$$-U_3 + 2U_2 - U_1 = h^2 F_2$$

$$\vdots$$

RB

$$-\underbrace{U_n}_{=0} + 2U_{n-1} - U_{n-2} = h^2 F_{n-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \phi \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \phi & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

numerische lineare Algebra $\Rightarrow$ iterative Verf.

$$-u_{xx} = f \quad \text{auf } [0,1]$$

$$u_x(0) = 0 \qquad \text{Neumann Bedingung}$$
$$u_x(1) = 0$$

RB $\quad u_x(0) \approx \dfrac{U_1 - U_0}{h} = H_e \Rightarrow U_1 = U_0 + hH_e$

$\quad u_x(1) \approx \dfrac{U_n - U_{n-1}}{h} = H_r \Rightarrow U_n = U_{n-1} + hH_r$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{n-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -hH_e \\ h^2 F_1 \\ \vdots \\ h^2 F_{n-1} \\ hH_r \end{pmatrix}$$

Zeilensumme $(0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)$

$\sum$ Zeilen $= (0, \dots, 0)$ d.h. Zeilen sind l.a.

$\Rightarrow$ Matrix singulär $\Rightarrow$ entweder nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{auf } \partial U$$

$$-\int_U \operatorname{div} \nabla u \, dx = \int_U -\Delta u \, dx = \int_U f \, dx$$

Gauß

$$= -\int_{\partial U} \nabla u \cdot n \, dS = -\int_{\partial U} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=h} dS$$

$$\Rightarrow \quad -\int_{\partial U} h \, dS \overset{!}{=} \int_U f \, dx \quad (A)$$

Falls (A) nicht erfüllt $\Rightarrow$ nicht lösbar

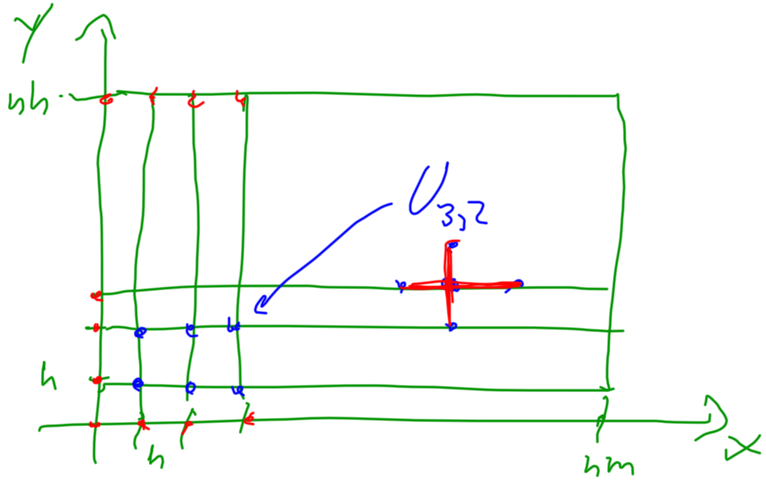
Falls (A) erfüllt $\Rightarrow$ mehrfache Lsg.

Sei u eine Lsg.

$$-\Delta u = f$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h$$

$\Rightarrow$ $w = u + c$ and. Lsg.

2dimensional



$$-\Delta u = f$$
$$u = g \quad \partial\Omega$$

$$U_{i,j} \approx u(i\cdot h, j\cdot h)$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u(ih, jh) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

$$+ \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2}$$

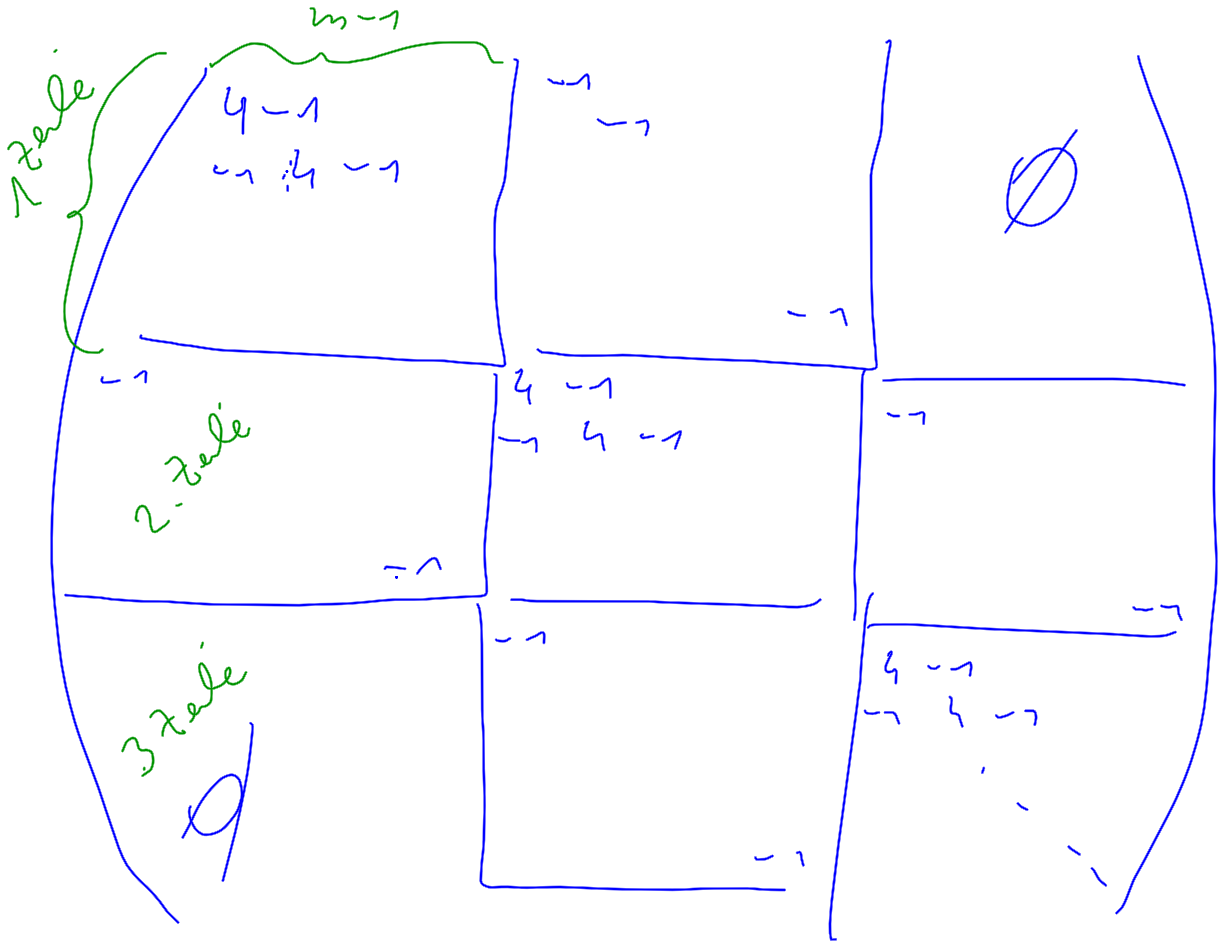
$$= \frac{U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j-1}}{h^2}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ \vdots \\ u_{m-1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$(n-1)(m-1)$ Vektor

$$-\Delta u = f$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & \ddots & \end{matrix}}^{m-1} & \begin{matrix} -1 & \\ & -1 \\ & & \ddots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & \ddots & \end{matrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \\ U \\ \\ \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} \\ F \\ \\ \end{pmatrix}$$



Font

$$Ax = b$$

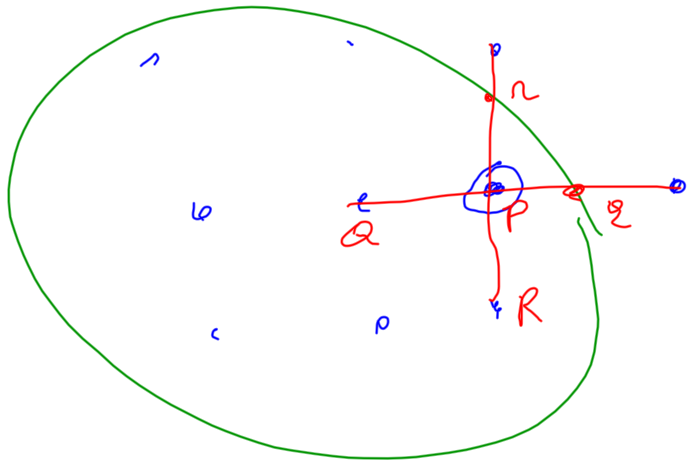
groß !!

dünn besetzt

spezielle Struktur !

U kein Rechteck

RB wo?



$q = P + (\alpha h, 0)$

$r = P + (0, \beta h)$

$0 < \alpha, \beta < 1$

$$U(q) = u(P) + \alpha h\, u_x(P) + \frac{\alpha^2 h^2}{2} u_{xx}(P) + \dots$$

$$U(Q) = u(P) - h\, u_x(P) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(P) + \dots \quad / \cdot \alpha$$

$$U(q) + \alpha U(Q) = U(P)(1+\alpha) + (\alpha^2 - \alpha)\frac{h^2}{2} u_{xx}(P)$$

$$U_{xx}(P) \approx \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\frac{h^2}{2}}\left(U(q) - (1+\alpha)U(P) + \alpha U(Q)\right)$$

RB

man modifiziert Δu nahe am Rande

$$\underbrace{u(x_{i+1},\ )}_{U_{i+1}^{j}} - \underbrace{u(x_{i-1},\ )}_{U_{i-1}^{j}} = 2h\,u_x + \frac{2}{6}h^3 u_{xxx}$$

$$\frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{2h} - u_x = O(h^2)$$

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + h\,u_x + h^2 \ldots$$

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} = u_x + O(h)$$

$$\frac{U_{i+1}^{j} - U_{i-1}^{j}}{h} - u_x = O(h)$$

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

U_t

$\downarrow$

$\dfrac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten–Differenzen gegeben durch

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\Big(f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j)\Big)$$

$f(u)_x$

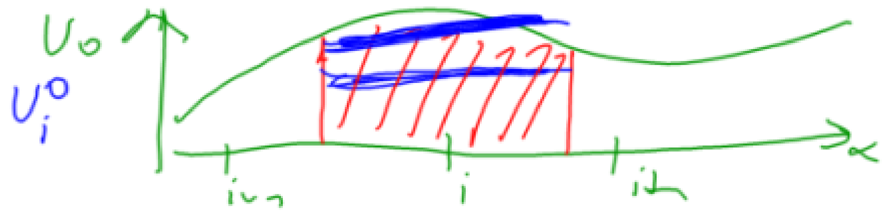
$\downarrow$

$\dfrac{f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j)}{2h}$

mit den Anfangsbedingungen

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x)\, dx$$

Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.



162

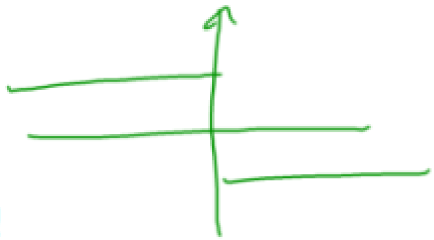
Beispiel: Wir betrachten das Problem

$f(u) = \frac{u^2}{2}$

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

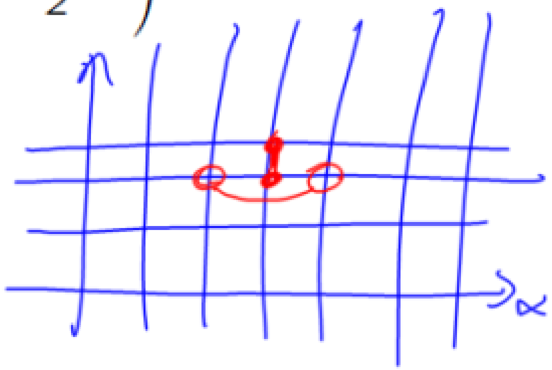
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \; x \leq 0 \\ -1 & : \; x > 0 \end{cases}$$



Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2}\right)$$

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : \; i < 0 \\ 0 & : \; i = 0 \\ -1 & : \; i > 0 \end{cases}$$



Fazit: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

163

Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

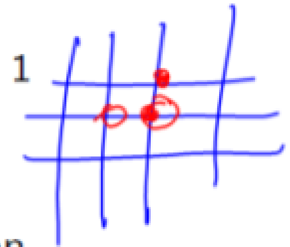
$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right)$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind–Verfahren: funktioniert unter der CFL–Bedingung $k/h < 1$



$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h}\left(U_i^j - U_{i-1}^j\right)$$

Lax–Friedrichs–Verfahren: funktioniert wie das Upwind–Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right)$$