

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung mittels Produktansatz:

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\u(0, t) &= 0 = u(1, t), \quad t \geq 0, \\u(x, 0) &= \frac{x(1-x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \\u_t(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 26:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell} \sin t - \frac{x}{\ell} \cos t, \quad \text{für } 0 < x < \ell \text{ und } t > 0, \\u(0, t) &= \sin t, \\u(\ell, t) &= \cos t, \quad \text{für } t \geq 0, \\u(x, 0) &= \frac{x}{\ell}, \\u_t(x, 0) &= 1 - \frac{x}{\ell}, \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Aufgabe 27:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{für } 0 < x < \pi, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) := x + \sin x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = t, \quad u(\pi, t) = \pi \quad \text{für } 0 \leq t.$$

Aufgabe 28:

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randwertaufgabe

$$-\Delta u = \lambda u, \quad (x, y) \in D :=]-1, 1[\times]-1, 1[$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Hinweis: Verwenden Sie einen Produktansatz $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Abgabetermin: 13.7. (zu Beginn der Übung)