Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2010**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Für den Kreis sei das innere Neumannsche Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für} \quad x^2+y^2<R^2\,, \\ \frac{\partial}{\partial r}\,u(R,\varphi) &= v_0(\varphi) && \text{für} \quad \varphi\in[0,2\pi]\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass für die Existenz einer Lösung notwendig $\int\limits_0^{2\pi} v_0(\varphi)d\varphi = 0$ gelten muss und dass die Lösung die folgende Form besitzt

$$u(r,\varphi) \;=\; C \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi)\right) r^k$$

mit einer beliebigen Konstanten $C\in\mathbb{R}$.

b) Man berechne die Lösung für das Beispiel $R=2$ und

$$v_0(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi - 4\cos^3\varphi + 3\cos\varphi$$

zunächst in Polarkoordinaten und wandle diese dann anschließend um in kartesische Koordinaten.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad x\in\mathbb{R} \;\text{ und }\; t>0\,, \\ u(x,0) &= e^{3x-1} && \text{für} \quad x\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 19: (aus dem Vordiplom 19.02.02)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 3\,, \\ & && \phantom{\text{für }} 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(3,t) && \text{für } 0 \le t \le T \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \le x \le 3\,. \end{aligned}$$

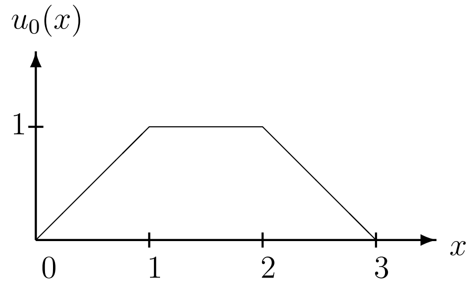

Bild 21 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für } (x,y) \in\,]0,1[\, \times\,]0,2[\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,y,t) &= 0 = u(1,y,t) && \text{für } y \in [0,2]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) &= 0 = u(x,2,t) && \phantom{\text{für }} x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) &= 7\sin(2\pi x)\sin(\pi y) && \text{für } (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ & \quad +(3\sin(\pi x) - 4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) \quad . \end{aligned}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Abgabetermin: 15.6.-17.6. (zu Beginn der Übung)