Department Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2009**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben für $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $u_t - 2u_x = 0\,, \qquad u(x,0) = x^3$

b) $u_t + t^3 u_x = 0\,, \qquad u(x,0) = e^{-(x-1)^2}\,.$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + a(x,t)u_x &= b(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen a, b, g. Die Charakteristiken seien (wie im homogenem Fall) die Lösungen der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\,(x(t),t)\,, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung entlang dieser Charakteristiken durch

$$u\,(x(t),t) = g(x(0)) + \int_0^t b\,(x(\tau),\tau)\,d\tau$$

gegeben ist.

b) Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x^2 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) mit Hilfe von a)

(ii) mit der Methode aus der Vorlesung.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben.

a) $xu_x + \frac{y}{2}u_y = u$

$u(1, y) = 1 + y^2$

b) $2u_t + x^2 u_x = \dfrac{1}{u} \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R},$

$u(x, 0) = 2\sqrt{e^{-4x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}\,,$

Existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$?

Wenn nicht, kann die Lösung in den Definitionslücken stetig ergänzt werden?

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie eine stetige Lösung $u(x, t)$ der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, \qquad x, t > 0 \\ u(x, 0) &= x \qquad (x \geq 0) \\ u(0, t) &= t \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x, 0) = 0$, bzw. zur Randbedingung $u(0, t) = t$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene Lösung für alle $x, t \geq 0$ partiell differenzierbar?

Freiwillige Zusatzaufgabe : Wer mag, kann die Aufgabe auch mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t lösen. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.

Abgabetermine: 04-07.05.09