

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Berechnen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (2x - 1)e^{-t} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x) := \begin{cases} -4x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \\ u(0, t) &= e^{-t}, \quad u(1, t) = -e^{-t} \quad \text{für } 0 \leq t. \end{aligned}$$

Aufgabe 26: (Besselscher Irrgarten)

Die Dreiterm-Rekursion für die Bessel-Funktionen, vgl. (8.24),

$$J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x) - J_{k-1}(x)$$

soll numerisch ausgewertet werden. Folgende Testdaten für $x = 2.13$ sind gegeben

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1.496067704488443 \times 10^{-1}, & J_{13}(x) &= 3.357253124236042 \times 10^{-10}, \\ J_1(x) &= 5.649969805641273 \times 10^{-1}, & J_{14}(x) &= 2.567845664148153 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie numerisch mittels der obigen Rekursion

(i) $J_{13}(x), J_{14}(x)$ aus $J_0(x), J_1(x)$ und

(ii) $J_0(x), J_1(x)$ aus $J_{13}(x), J_{14}(x)$.

Wie lässt sich das Fehlerverhalten erklären?

b) Formulieren Sie einen zuverlässigen Algorithmus zur Berechnung von $J_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ mit Hilfe der obigen Rekursion, die in Rückwärtsrichtung auszuwerten ist. Eine Skalierung der berechneten Werte ergibt sich aus der Relation (8.25) des Skripts.

Aufgabe 27:

Berechnen Sie die Gammafunktion $\Gamma(x)$, $1 \leq x \leq 2$, bzw. die inverse Gammafunktion numerisch mit Hilfe des Clenshaw-Algorithmus und den im Skript (S.160) angegebenen Koeffizienten.

Die Genauigkeit lässt sich z.B. anhand der Relation $\Gamma(1.5) = \sqrt{\pi}/2$, vgl. (8.12), (8.13), überprüfen.

Aufgabe 28:

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u, & (x, y) \in D & :=]-1, 1[\times]-1, 1[\\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial D. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie einen Produktansatz $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.

Abgabetermin: 8.7.-10.7. (zu Beginn der Übung)