**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= 25u_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \le x \le 2\,, \\
u_t(x,0) &= \frac{x}{2} && 0 \le x \le 2\,, \\
u(0,t) &= 1, && t > 0\,, \\
u(2,t) &= t, && t > 0.
\end{aligned}$$

**Hinweis :**

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \int \sin(ax)\,\sin(bx)\,dx = \frac{a}{b^2}\cos(ax)\sin(bx) - \frac{1}{b}\sin(ax)\cos(bx)$$

**Lösung 1:**

**Homogenisierung der Randwerte:**

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{2}(t-1)$$

**Neue Aufgabe:**

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= 25v_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \le x \le 2\,, \\
v_t(x,0) &= \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0 && 0 \le x \le 2\,, \\
v(0,t) &= 1 - 1 = 0, && t > 0\,, \\
v(2,t) &= t - 1 - (t-1) = 0, && t > 0.
\end{aligned}$$

**Lösung der homogenen Aufgabe:**

Nach Vorlesung/Übung gilt

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L}\,t) \;+\; B_k \sin(\frac{ck\pi}{L}\,t)\right] \sin(\frac{k\pi}{L}\,x)$$

Wegen $v_t(x,0) = 0$ gilt $\boxed{B_k = 0}$.

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L v(\alpha,0)\sin(\frac{k\pi}{L}\,\alpha)\,d\alpha = \int_0^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \sin(\frac{\alpha\pi}{4})\right)\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha$$

$$\int_0^2 \frac{\alpha}{2}\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha \;=\; \left[\frac{\alpha}{2}\frac{-2}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{2k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}\alpha)$$
$$= \frac{-2}{k\pi}(-1)^k + \left[\cdots\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\right]_0^2 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

Nach dem Hinweis gilt mit $a = \pi/4$ nd $b = k\pi/2$:

$$\int_0^2 \sin(\frac{\alpha\pi}{4})\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha \;=\; \frac{b^2}{b^2-a^2}\left[\frac{a}{b^2}\cos(a\,\alpha)\sin(b\alpha) - \frac{1}{b}\sin(a\alpha)\cos(b\alpha)\right]_0^2$$
$$= \frac{\frac{k^2\pi^2}{4}}{\frac{k^2\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}}\left[\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{k^2\pi^2}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}\,\alpha)\sin(\frac{k\pi}{2}\alpha) - \frac{1}{\frac{k\pi}{2}}\sin(\frac{\pi}{4}\alpha)\cos(\frac{k\pi}{2}\alpha)\right]_0^2$$
$$= \frac{4k^2}{4k^2-1}\left[-\frac{2}{k\pi}\sin(\pi/2)\cos(k\pi)\right] = \frac{4k^2}{4k^2-1}\left[-\frac{2}{k\pi}(-1)^k\right]$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1} - \frac{4k^2}{4k^2-1}\left[\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\right] = \frac{2}{k\pi}(-1)^k\frac{1}{4k^2-1}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(\frac{5k\pi}{2}\,t)\ \sin(\frac{k\pi}{2}\,x)$$
$$u(x,t) = v(x,t) + 1 + \frac{x}{2}(t-1)$$

**Aufgabe 2:**

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} 2u_t + x^2 u_x &= \frac{1}{u} \qquad t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= 2\sqrt{e^{-4x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

b) Für jedes $t > 0$ gibt es einen Punkt $(x(t), t)$ in dem die Lösungsformel aus a) nicht definiert ist. Bestimmen Sie $x(t)$.

c) Existieren für die Definitionslücken $(x(t), t)$ aus Teil b) die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x(t)} u(x,t)\,?$$

Wenn ja, berechnen Sie diesen Grenzwert für $t = 4$.

**Lösung 2:**

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{llll} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{2} & \frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{2} & -\frac{1}{x} = \frac{t}{2} - C_1 & C_1 = \frac{t}{2} + \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{2u} & 2u \cdot du = dt & u^2 = t + C_2 & C_2 = u^2 - t \end{array}$$

$$C_2 = f(C_1) \Longleftrightarrow u^2 - t = f(\frac{t}{2} + \frac{1}{x})$$

Aus den Anfangsdaten folgt

$$(u(x,0))^2 - 0 = 4\,e^{-4x^2} = f(\frac{1}{x})\,.$$

Also

$$f(y) \;=\; 4\,e^{-4(1/y)^2} \Longrightarrow u^2 = t + 4\exp\left(-4(\frac{t}{2} + \frac{1}{x})^{-2}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{t + 4\exp\left(-4(\frac{(2x)^2}{(tx+2)^2}\right)} = \sqrt{t + 4e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}}}\,.$$

b) Die Lösung ist für $x(t) = -2/t$ nicht definiert.

c) Der Grenzwert exitiert, denn für jedes feste $t \in \mathbb{R}^+$ gilt $x^2 = 4/t^2 \neq 0$ und

$$\lim_{x \to -2/t} \frac{-16x^2}{(tx+2)^2} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to -2/t} e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}} = 0$$

und damit

$$\lim_{x \to x(t)} u(x,t) = \sqrt{t}\,,$$

$$\lim_{x \to x(4)} u(x,4) = 2\,.$$