Aufgabe 1:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangs-randwertaufgabe.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \leq x \leq\ 2\,, \\ u_t(x,0) &= \frac{x}{2} && 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) &= 1, && t > 0\,, \\ u(2,t) &= t, && t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis :

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \int \sin(ax)\ \sin(bx)\,dx \ = \ \frac{a}{b^2}\cos(ax)\sin(bx) - \frac{1}{b}\sin(ax)\cos(bx)$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} 2u_t + x^2 u_x &= \frac{1}{u} && t \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= 2\sqrt{e^{-4x^2}} && x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

b) Für jedes $t > 0$ gibt es einen Punkt $(x(t), t)$ in dem die Lösungsformel aus a) nicht definiert ist. Bestimmen Sie $x(t)$.

c) Existieren für die Definitionslücken $(x(t), t)$ aus Teil b) die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x(t)} u(x,t)\,?$$

Wenn ja, berechnen Sie diesen Grenzwert für $t = 4$.