

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{tt} + 4u_{xt} + u_{xx} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

- (i) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).
 - (ii) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform.
 - (iii) Wie hängen die neuen Koordinaten von den alten Koordinaten t, x ab?
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier-Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$u_t - u_{xx} = \frac{x - \pi}{\pi(t + 1)^2} \quad 0 < x < \pi, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x, 0) = 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) \quad 0 < x < \pi,$$

$$u(0, t) = \frac{1}{t + 1} \quad t > 0,$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad t > 0.$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Entropielösung der Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ -1 & 1 < x. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u_t + t^3 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x, 0) = e^{-(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, .$$