Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 1: Bestimmen Sie eine Näherung für die Lösung des folgenden Problems

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad x \in (0, 2\pi),\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0 \qquad x \in (0, 2\pi)$$

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \qquad t > 0$$

indem Sie die auftretenden Fourierreihen nach dem dritten Term abbrechen. Prüfen Sie nach, welche Rand– bzw. Anfangsbedingung bereits durch diese Näherungslösung erfüllt wird. Skizzieren Sie die Anfangsdaten $u(x,0)$ und die von Ihnen berechnete Approximation der Lösung für $t = 0$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgaben

a)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \frac{x}{\pi} \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(x) \qquad x \in (0,\pi), \\ u(0,t) &= 0 \qquad t > 0 \\ u(\pi,t) &= 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= f(x,t) := 1 \qquad x \in (a,b) := (0,\pi),\ t > 0, \\ v(x,0) &= g(x) := x + \sin(x) \qquad x \in (0,\pi), \\ v(0,t) &= \phi_1(t) := t \qquad t > 0 \\ v(\pi,t) &= \phi_2(t) := \pi \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Hinweis:Eine Aufgabe diesen Typs kann man z. B. lösen, indem man die Funktion u über

$$v(x,t) = u(x,t) + \phi_1(t) + \frac{x-a}{b-a}\left(\phi_2(t) - \phi_1(t)\right)$$

definiert und in der Aufgabenstellung die v–Ausdrücke durch geeignete u–Ausdrücke ersetzt. Man erhält z.B.

$$v_t = u_t + \dot{\phi}_1 + \frac{x-a}{b-a}\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right).$$

Beachten Sie das Ergebnis aus Teil a).

Aufgabe 3: [Klausur 2006, Oberle/Kiani]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgaben.

a)

$$\begin{aligned} v_{tt} &= 4v_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) &= -\sin(\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ v_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0 && t > 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin(\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 < x < 1\,, \\ u(0,t) &= 0 && t > 0\,, \\ u(1,t) &= 1 && t > 0\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Homogenisierung der Randdaten, wie in Aufgabe 2.

Aufgabe 4:

a) Leiten Sie analog zur Vorgehensweise in der Vorlesung für das folgende Neumann Problem eine Reihendarstellung der Lösung her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 && t > 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

Abgabetermin: 10/12.07.07