

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$\text{a) } u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

für $t \geq 0$.

Hinweise :

- Lösen Sie das Problem zunächst für $t \leq 2$.
- Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?
- Wie lautet die Lösung für $t > 2$?

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x, t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$v(x, t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$q(x, t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir führen zusätzlich ein:

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

und verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit einführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x, t)) = v_{max} \left(1 - \frac{u(x, t)}{u_{max}} \right)$$

- a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.
- b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.
- c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad (\text{Hier ist geeignet skaliert worden!})$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = u_{max} / 2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{rote Ampel/ Stau etc.})$$

- d) Für die Burgersgleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

- a) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x = \cos(y)e^{-x}$
- b) $2u_{xx} + u_{xy} + xu_x = u$
- c) $3u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$
- d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x$
- e) $u_{xx} + 2(x - y)u_{xy} + (x^2 + y^2)u_{yy} = 0$

Abgabetermin: 8/10.05.07