Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Lösungen der beiden Anfangswertaufgaben

$$u_t - 2u_x = 0$$

und

$$u_t + xu_x = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = x^3$.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + a(x,t)u_x &= b(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit gegebenen hinreichend glatten Funktionen a, b, g. Die Charakteristiken seien (wie im homogenem Fall) die Lösungen der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\left(x(t), t\right), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung entlang dieser Charakteristiken durch

$$u\left(x(t), t\right) = g(x(0)) + \int_0^t b\left(x(\tau), \tau\right) d\tau$$

gegeben ist.

b) Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x^2 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) mit Hilfe von a)

(ii) mit der Methode aus der Vorlesung.

Aufgabe 3:

a) [Klausur 2003] Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2xu_x &= tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Weisen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingung nach, dass Sie tatsächlich eine Lösung gefunden haben.

b) [Klausur 2005] Berechnen Sie diejenige Lösung des Problems

$$u_x + u_y \;=\; u^2 \,,$$

die, die Anfangskurve $c(t) = (t, -t, t)$ enthält.

Aufgabe 4: [Klausur 2003] Bestimmen Sie eine Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$$

Hinweis : Es genügt eine zeichnerische Lösung mit Angabe der letzten Formel.

Abgabetermin: 24.04.07