Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine Darstellung der allgemeinen reellen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Für wleche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0$$

nichttriviale Lösungen?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie geeignete reelle Fourierreihen der folgenden Funktionen:

a) Ungerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f\,:\,[0,1[\to \mathbb{R},\quad f(x) = \sin(4\pi x) + 2\sin(6\pi x) \quad L = 1\,,$

b) Gerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\to \mathbb{R},\quad L = \pi$ mit

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_y = g(x,y)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \neq 0\,.$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung über

$$\nu := bx + ay \,,\ \mu := bx - ay$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung.

b) Lösen Sie mit Hilfe von a) folgende Anfangswertaufgaben

(i)

$$u_t + 4u_x = 64t + 16x + 8 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 2x,$$

(ii)

$$u_t + 3u_x = 6e^{x-3t} \quad \text{mit} \quad u(x,0) = xe^x.$$

Aufgabe 4:

Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluß von Fahrzeugen entlang einer unendlichen langen, einspurigen Fahrbahn. Es ist üblich nicht einzelne Fahrzeuge zu beobachten, sondern den Gesamtfluß. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und das keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Wie lautet die Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge).

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Geschwindigkeit nur von der Dichte abhängt : $v = v(u)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die Erhaltung der Masse beschreibt.

c) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte wächst und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) = c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

d) Lösen Sie die Aufgabe aus Teil c) mit $c = 2$ und $u(x,0) = e^{-x^2}$.

Abgabetermin: 10.04.07