Differential Equations I

J. Behrens / Winter 2021/22

TUHH
Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

–VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
–GENESENE
–GETESTETE
(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

–FULLY VACCINATED
–RECOVERED
–TESTED
(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

1 Example of Differential Equation:

radio active decay: observe mass over time of a radioactive substance:

$$m(t) \quad : \quad \text{masse at time } t.$$

Observation or Experience:

$$m(t) - m(t+h) \sim m(t)\cdot h$$

h is a small time interval.

Use a proportionality constant:

$$\boxed{m(t) - m(t+h) = -k \cdot m(t) \cdot h}$$

Division by h and use a limit process for $h \to 0$:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{m(t) - m(t+h)}{h} = \frac{dm}{dt} = -k\, m(t)}$$

Simple nomenclature:

$$\boxed{m'(t) = -k\, m(t)}$$

---

② Remember: ODE Definition

If $y = y(x)$ is n-times differentiable, then an implicit Form of an ODE is given by

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

and an explicit Form is

$$y^{(n)} = \tilde{F}(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) .$$

y is called a <u>Solution</u>

i) $y' = \overbrace{\sin x \cdot \cos y}^{f(x,y)}$ is an explicitly defined ODE of order 1.

$F(x,y,y') := y' - \sin x \cdot \cos y = 0$ is the implicit form.

ii) $y(x) = e^x$ is a solution of the 1^{st} order ODE
$$y'(x) = y(x).$$

iii) In general an ODE has infinitely many solutions

$y' = \frac{x}{y}$ has solutions $y = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C}$ $\quad C \in \mathbb{R}$, $C = \text{const.}$

in order to determine C, we need initial or boundary values.

3

- Sei $f(x,y)$ in einem Gebiet $D_f \subset \mathbb{R}^2$ definiert und sei $(x_0, y_0) \in D_f$.
- Ein Anfangswertproblem (AWP) ist gegeben durch

$$y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0.$$

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz):

1. Sei $f(x,y)$ in D_f stetig. Dann gibt es in einem gewissen Intervall $I = \{x : x_0 - a < x < x_0 + b\}$ um x_0 $(a, b > 0$ geeignet) mindestens eine Lösung $y(x)$ des AWP.
2. Sei die Funktion $f(x,y)$ sowie ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ in D_f stetig. Dann gibt es durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$ genau eine Lösung $y(x)$ des AWP, die in einem Intervall I um x_0 existiert.
3. Jede Lösungskurve $y(x)$ des AWP kann nach beiden Seiten (d.h. für $x < x_0$ und $x > x_0$) soweit fortgesetzt werden, dass sie den Rand des Gebietes D_f trifft, bzw. ihm beliebig nahe kommt.

- Let $y' = xy^2 = f(x,y)$ be given. Then f fulfills requirements in condition 2 above.

- Family of Solutions: $y = \dfrac{1}{C - \frac{x^2}{2}}$

- Let $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D_f$, and $y_0 \neq 0$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{y_0} - \frac{x_0^2}{2} .$$

- for (x_0, y_0) with $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ $\Rightarrow C > 0$

$$\Rightarrow I = \left]-\sqrt{2c}, \sqrt{2c}\right[= \underbrace{\left]-\sqrt{\frac{2}{y_0} + x_0^2}, \sqrt{\frac{2}{y_0} + x_0^2}\right[}_{\text{max. Domain}}$$

- Let $y_0 = 0$ $\Rightarrow y \equiv 0$ $\Rightarrow I = \mathbb{R}$

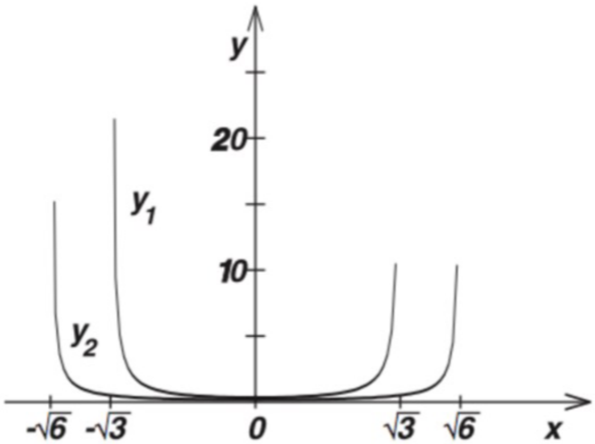

Abb. 6.3. Lösungen y_1 und y_2 von $y' = xy^2$ für $(x_0, y_0) = (1{,}1)$, d.h. $C = 1{,}5$, und $(x_0, y_0) = (2{,}1)$, d.h. $C = 3$

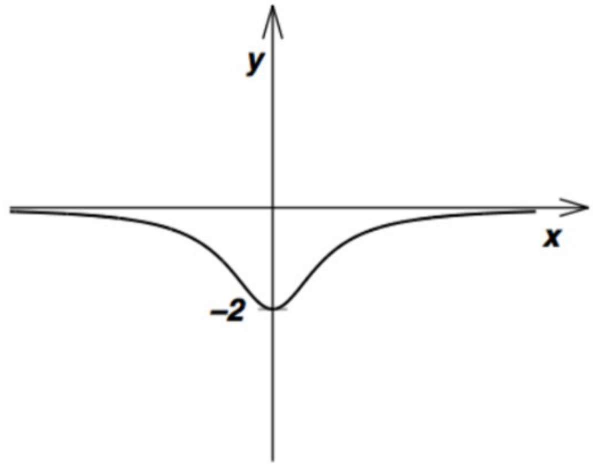

Abb. 6.4. Lösung y_3 des Anfangswertproblems $y' = xy^2$ mit $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, d.h. $C = -\frac{1}{2}$