

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 16y = 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$$

bestimme man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

- a) $4y(0) + y' \left(\frac{\pi}{8} \right) = 4$ und $y \left(\frac{\pi}{8} \right) = 0$,
- b) $y(0) = 1$ und $y' \left(\frac{\pi}{8} \right) = 1$,
- c) $y(0) + y'(0) = 0$ und $y \left(\frac{\pi}{8} \right) + y' \left(\frac{\pi}{8} \right) = 0$.

Aufgabe 22:

Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 7y_2 + y_3, & y_1(0) + y_1(b) &= -1, \\ y_2' &= -7y_1 + y_2 - y_3, & y_2(0) + y_2(b) &= 1, \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 7y_3, & y_3(0) + y_3(b) &= 2. \end{aligned}$$

- a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenform und
- b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertangabe eindeutig lösbar?
- d) Für $b = 1$ berechne man die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 23: (Klausur WiSe 2005/06)

In einer Variationsaufgabe ist das Funktional

$$I[y] = \int_0^{\pi/4} ((y')^2 - 4y^2 + 2) dt$$

gegeben für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(\pi/4) = 1$.

- a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- b) berechne die reelle Lösung der zugehörigen Randwertaufgabe und
- c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

Aufgabe 24:

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y' - \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 0.$$

Abgabetermin: 20.1. - 24.1.2014 (zu Beginn der Übung)