Partielle Differentialgleichungen

Def: Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche eine gesuchte Funktion $u = u(t, \vec{x})$, $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und partielle Ableitungen der gesuchten Funktion enthält

Bspl: $u_t + u_x = 0 \qquad u = u(t,x)$

Beispiele:

a) Potentialgleichung

$$\boxed{\Delta u = 0}\ , \quad u = u(\vec{x}), \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$$

1 Dimension $\quad u_{xx} = 0$

2 Dimensionen $\quad u_{xx} + u_{yy} = 0$

3 Dimensionen $\quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

b) Wärmeleitungsgleichung

$u_t = \Delta u \qquad u = u(t, \vec{x})$ Temperaturverteilung

2dim $\quad u_t = u_{xx} + u_{yy}$

c) Schrödingergleichung

$i u_t = \Delta u \qquad u = u(t, \vec{x})$ Wellenfunktion (komplex)

d) Wellengleichung

$$u_{tt} = \Delta u \qquad u = u(t,\vec{x}) \quad \text{Auslenkung}$$

 $u_{tt} = u_{xx}$ $n=1$ schwingende Saite

$n=2$ schwingende Membran

$n=3$ elastische Körper

e) Stabgleichung

$$-u_{t} = u_{xxxx} \qquad u = u(t,x) \quad \text{Auslenkung}$$

f) lineare Elastizitätstheorie

$$\vec{u}_{tt} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu)\, \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) = 0 \qquad \vec{u} = \vec{u}(t,\vec{x})$$

g) Maxwellgleichungen

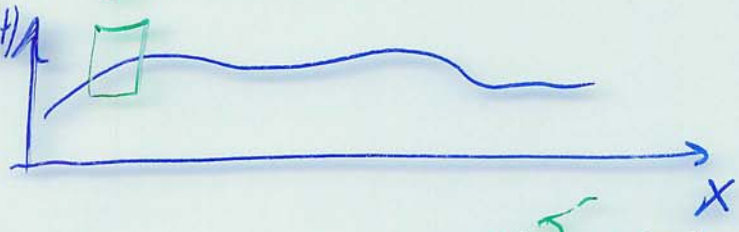
$$\vec{E}_t = \operatorname{rot} \vec{B} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\vec{B}_t = -\operatorname{rot} \vec{E} \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

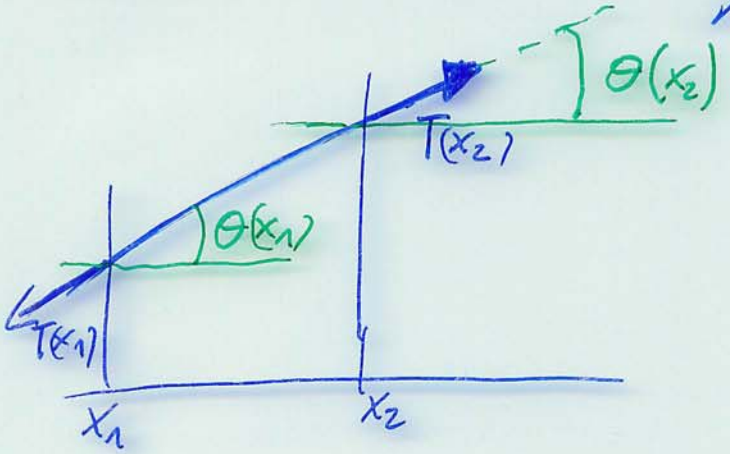
$\vec{E} = \vec{E}(t,\vec{x})$ elektrisches Feld

$\vec{B} = \vec{B}(t,\vec{x})$ magnetisches Feld

Schwingende Saite



$u(x,t)$ Auslenkung



$\rho(x)$ Massendichte (Liniendichte)

$$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, u(x,t)\, dx}_{\text{Masse} \times \text{Beschleunigung des Abschnitts } [x_1,x_2]} = T(x_2)\sin\theta(x_2) - T(x_1)\sin\theta(x_1) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\sin\theta(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\,\frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x(x,t)^2}}\right) dx$$

$$\overset{u_x \text{ klein}}{\approx} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\, u_x(x,t)\Big)\, dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, u_{tt}(x,t)\, dx \quad \overset{T \text{ Konstant}}{\approx} T\int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x,t)\, dx \qquad \forall\, [x_1,x_2]$$

$T = \text{konst}$

$\rho = \text{konst}$

$$\boxed{u_{tt} = \frac{T}{\rho}\, u_{xx}}$$

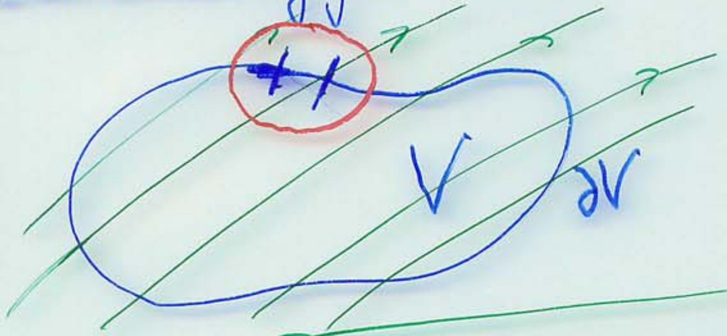
$\boxed{\text{Wellengleichung}}$

Diffusion

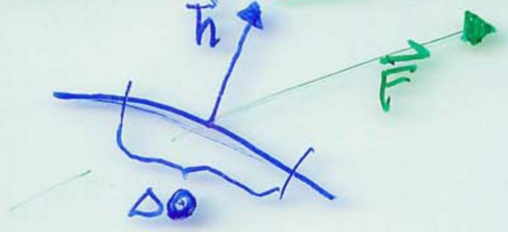
zeit unabhängiger Prozess

$u(\vec{x})$ Konzentration

$\vec{F}(\vec{x})$ Fluß der Konzentration



stationär $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Gesamtfluß durch Oberfläche } \partial V \text{ ist Null}}$



Fluß durch ΔS ist: $\boxed{(\vec{n}\cdot\vec{F})\,\Delta O}$

Fluß durch gesamte Oberfläche $\boxed{\int_{\partial V} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dO}$ Oberfl. Int. 2. Art

also $0 = \int_{\partial V} (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dO = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\,d\vec{x}$

Satz von Gauß

gilt $\forall$ Gebiete V $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = 0}$

Fluß ist (Modell!) $\boxed{\vec{F} = -\nabla u}$ (Gradient ist der steilste Abstieg)

$\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla u) = 0 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = \boxed{\Delta u = 0}$

•) $\vec{F}$ Wärmefluß $\quad \vec{F} = -\lambda \nabla T \quad$ T Temperatur $\quad \Delta T = 0$

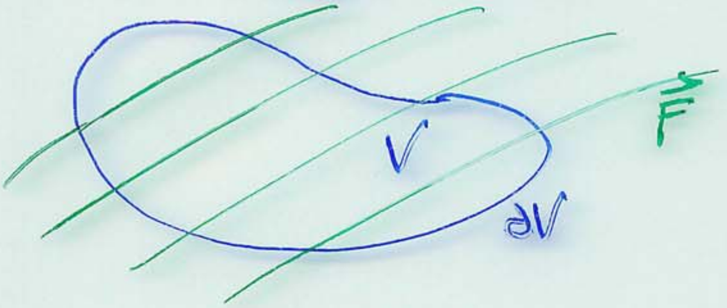
•) $\vec{E}$ Elektrisches Feld $\quad \vec{E} = -\nabla\phi \quad$ ϕ elektrisches Potential

Zeitliche Änderung

zeitabhängiger Prozess

$u = u(\vec{x}, t)$

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$



Gesamtfluß durch die Oberfläche ist nicht mehr konstant

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V u \, d\vec{x}}_{\text{gesamte Menge in } V} = - \underbrace{\int_{\partial V} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, do}_{\substack{\text{Abfluß aus } V \text{ (mit +)} \\ \text{Zufluß zu } V \text{ (mit −)}}}$$

$\|$ $\qquad\qquad\qquad$ $\|$ Gauss

$$\int_V u_t \, d\vec{x} = - \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d\vec{x}$$

Fluß $\quad \vec{F} = - \nabla u$

$$\int_V (u_t - \Delta u) \, dx = 0 \quad \forall V \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_t = \Delta u}$$

Diffusionsgl.

Wärmeleitungsgleichung