Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze/ Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'(x) \;=\; f(\alpha x + \beta y(x) + \gamma)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Substitution

$$u(x) := \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

auf eine separierbare Differentialgleichung transformiert werden kann.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; 1 + \frac{2}{x-y+4}, \qquad \text{für } x - y + 4 > 0\,.$$

c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Aufgabe 2: Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) *Trennung der Variablen:* [Aus Bärwolff, Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure]

$$\text{i)}\quad 2xy^2 \;=\; (1-x^2)\,y', \qquad\qquad \text{ii)}\quad x\,y' \;=\; -\,y\ln y,$$

$$\text{iii)}\quad x\,y' \;=\; \sqrt{x}y^2, \qquad\qquad \text{iv)}\quad y' \;=\; 2x\,\frac{\cos^2 y}{1+x^2}\,.$$

b) *Lineare Differentialgleichungen:*

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{t}\,y &= 1, \\ y' - 4t\,y &= 8t^3, \\ y' - y &= \cos t. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. Es seien

$V :=$ Volumen $\quad K :=$ Sättigungskonzentration,
$K_0 :=$ Anfangskonzentration $\quad S(t) :=$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt t,
$S_0 := S(0) =$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert),
$K_0 + \dfrac{S_0 - S(t)}{V} :=$ Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt t,
$\gamma :=$ Proportionalitätskonstante.

a) Beschreiben Sie den Auflösungsprozess durch eine Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Daten
$S_0 = 10$ kg, $V = 100$ lit, $K = 0.25\,\mathrm{kg/lit}$, $K_0 = 0\,\mathrm{kg/lit}$, $\gamma = 4\,\mathrm{lit}/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s})$.
indem Sie die Differentialgleichung

(i) als Bernoullische Differentialgleichung behandeln,

(ii) direkt, als separierbare Differentialgleichung lösen.

c) (Freiwillige Zusatzaufgabe) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des Matlab–Befehls ode45 numerisch. Informieren Sie sich mit Hilfe des Befehls

```
>> help ode45
```

Vergleichen Sie graphisch Ihre exakte Lösung mit der von Matlab gelieferten Lösung.

Aufgabe 4: (Riccatische Differentialgleichungen)

a) Gegeben sei eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)\,.$$

Weiterhin sei y eine beliebige Lösung der Differentialgleichung.

Zeigen Sie, dass dann die Differenz $u = y - y_p$ die folgende Bernoullische Differentialgleichung löst:

$$u' + [a(x) + 2b(x)y_p(x)]u + bu^2 = 0\,.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' - 2x^2(y-1) + xy(y-2) = 1 - x - x^3\,.$$

Hinweise: Benutzen Sie Teil a). Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p und setzen Sie $u = y - y_p$. Wegen der polynomialen Koeffizienten bietet sich ein polynomialer Ansatz für die partikuläre Lösung an!

Abgabetermine: 03.11-07.11.2008