

# Differentialgleichungen I

**Michael Hinze**  
**(zusammen mit Peywand Kiani)**

**Department Mathematik**  
**Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg**



Universität Hamburg

**2. Februar 2009**

## Beachtungswertes

- ▶ Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- ▶ Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>
- ▶ Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- ▶ Übungshefte: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.
- ▶ Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

# Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

**Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:**

**<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>**

## Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Auf  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  seien  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  und  $r$  vorgegebene stetige Funktionen,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$  ( $i = 1, 2$ ) und für  $y \in C^2(I)$  (= 2 mal stetig auf  $I$  differenzierbare Funktionen) sei

$$D[y] := a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y, \quad R_1(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) \\ \text{und } R_2(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b).$$

Dann heißt die Aufgabe *Finde*  $y \in C^2(I)$  mit

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1, \quad R_2(y) = \gamma_2$$

*Randwertaufgabe 2ter Ordnung für*  $y$ .

## Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Seien  $y_1, y_2$  ein Fundamentalsystem und  $y_p$  partikuläre Lösung der DGL

$$D[y] = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r,$$

sowie

$$r_1 := \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a) \text{ und } r_2 := \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b).$$

**Satz:** Ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

lösbar, so besitzt die Randwertaufgabe

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1, R_2(y) = \gamma_2$$

eine Lösung  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ . Diese ist eindeutig, gdw

$$\text{die Matrix } \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix}$$

regulär ist

## Buch Kap. 6.13 – Eigenwertaufgaben 2ter Ordnung

Sei  $p$  auf  $[a, b]$  stetig diffbar und  $p(x) > 0$  für  $x \in (a, b)$ ,  $q$  sei stetig auf  $[a, b]$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dann heißt

$$L[y] := -(py')' + qy = \lambda y, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \text{und } \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

**Eigenwertproblem (nach Sturm-Liouville) und eine Funktion  $y$ , welche das Problem löst, Eigenlösung zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ .**

**Dabei soll wieder  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$  ( $i = 1, 2$ ) vorausgesetzt werden.**

## Buch Kap. 6.13 – Eigenwertaufgaben 2ter Ordnung

**In der verallgemeinerten homogenen Sturm-Liouville Differentialgleichung**

$$L[y] + \lambda wy = -(p(x)y')' + q(x)y - \lambda wy = 0$$

seien  $p$  stetig differenzierbar,  $q, w$  stetig und  $p, w > 0$  auf  $(a, b)$ . Ferner sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter.

Dann gilt für zwei zu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  gehörende, nichttriviale Lösungen  $y_1, y_2 \in C^2([a, b], \mathbb{R})$

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x) dx = 0,$$

**falls**

**(a)  $y_1$  und  $y_2$  homogene Randbedingungen (s. vorherige Folie) erfüllen, also  $\lambda_1, \lambda_2$  Eigenwerte und  $y_1, y_2$  Eigenfunktionen sind, oder**

**(b) die Koeffizientenfunktion  $p(x)$  die Bedingung  $p(a) = p(b) = 0$  erfüllt.**

## Buch Kap. 6.13 – Eigenfunktionen (Satz 6.15,6.16)

### Eigenfunktionen und -werte der Eigenwertaufgabe

$$L[y] + \lambda wy = -(p(x)y')' + q(x)y - \lambda wy = 0$$

besitzen folgende Eigenschaften:

(a) Es gibt  $\infty$ -viele Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Insbesondere sind alle Eigenwerte einfach.

(b) Jede Eigenfunktion  $y_n$  (zu  $\lambda_n$ ) besitzt in  $(a, b)$  genau  $n$  Nullstellen.

(c) Seien  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Eigenfunktionen mit  $\langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$ . Ferner sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig diffbar und erfülle dort die Randbedingungen der Eigenfunktionen. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, y_i \rangle y_i(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

und die Reihe konvergiert gleichmässig auf  $[a, b]$ .