Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

3. November 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Satz 6.2: Die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$ und die Komponenten von $\mathrm{g}(x)$ seien stetig im Intervall $[a, b]$.

Dann hat das System $\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y} + \mathrm{g}(x)$ mindestens eine Lösung.

Sei $x_0 \in [a, b]$ und $(y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y} + \mathrm{g}, \quad \mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0 \ ,$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Buch Kap. 6.6 – Homogene Systeme

Satz 6.3: Sind die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$, in $[a, b]$ stetig, dann besitzt das homogene System

$$\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y}$$

auf $[a, b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Buch Kap. 6.6 – Wronski Determinante

Definition 6.2: Bezeichnen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$$

und bezeichne $Y(x)$ die Matrix mit Spalten $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$W(x) := \det\ Y(x)$$

WRONSKI–**Determinante.**

Buch Kap. 6.6 – Wronski Test

Satz 6.4: Seien $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_n$ Lösungen von

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$$

auf dem Intervall $[a, b]$. Sind die Elemente von $A(x)$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt

a) **$W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.**

b) **Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$ ist.**

Buch Kap. 6.6 – Lösungsmenge homogener Systeme

Satz 6.5: Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_n$ sei auf $[a, b]$ ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $[a, b]$ in der Form

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$$

darstellen, wobei $c_1, c_2, \dots, c_n$ Konstanten sind, die reell oder komplex sein können. $\mathbf{y}$ in dieser Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}.$$

Buch Kap. 6.7 – DGLsysteme erster Ordnung – Lösungsstruktur

Satz 6.8: Sei $\mathbf{y}_p$ irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem und damit $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$ die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$.

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, die reell oder komplex sein können.

Buch Kap. 6.7 – Variation der Konstanten

Satz 6.9: Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n$ sei ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ auf $[a, b]$ gegeben. Weiterhin sei

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \ldots \ \mathbf{y}_n].$$

Sind die Koordinaten von $\mathbf{g}$ stetig in $[a, b]$, so ist

$$\mathbf{y}_p(x) = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}.$$

Dabei gilt $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\,dx$ und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^T$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$