Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

27. Oktober 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 6.1 – Differentialgleichungen

Anwendung von Differentialgleichungen auf technische Fragestellungen:

a) **Mathematische Modellierung eines (technischen) Problems durch Aufstellen einer Differentialgleichung**
b) **Formulierung (physikalisch) sinnvoller Anfangs- oder Randbedingungen**
c) **Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- bzw. Randbedingungen**
d) **Rückübertragung der Lösung auf die ursprüngliche Fragestellung**

Buch Kap. 6.2 – Allgemeine Begriffe

Definition 6.1: (gewöhnliche Differentialgleichung)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{(implizite Form).}$$

Liegt diese Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so spricht man von der expliziten Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad \text{(explizite Form).}$$

Buch Kap. 6.3 – Richtungsfelder

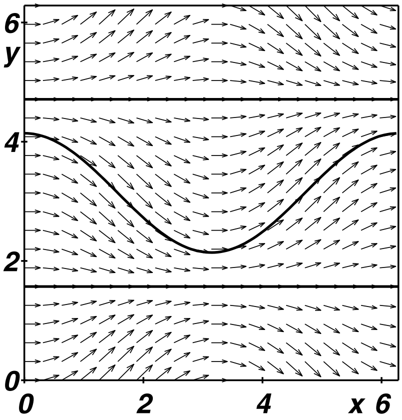

Abbildung 6.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \sin x \cos y$

Buch Kap. 6.3 – Existenz- und Einzigkeitssatz

Satz 6.1: Das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

mit $(x_0, y_0) \in D_f := [a_1, a_2] \times [b_1, b_2], \; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fest, besitzt mindestens eine Lösung, falls $f(x, y)$ auf D_f eine stetige Funktion darstellt.
Ist die Funktion f zudem für jedes $x \in [a_1, a_2]$ Lipschitz$-$stetig bzgl. y, d.m. gilt $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ für alle $y_1, y_2 \in [b_1, b_2]$, dann ist die Lösung eindeutig.
Zu jedem $(x_0, y_0) \in D_f$ gibt es dann auch ein maximales Intervall I um x_0 mit

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für alle } x \in I \text{ und } y(x_0) = y_0,$$

und die Lösung $y(x)$ lässt sich nicht auf ein größeres Intervall fortsetzen.

Buch Kap. 6.3 – Existenz und Einzigkeit

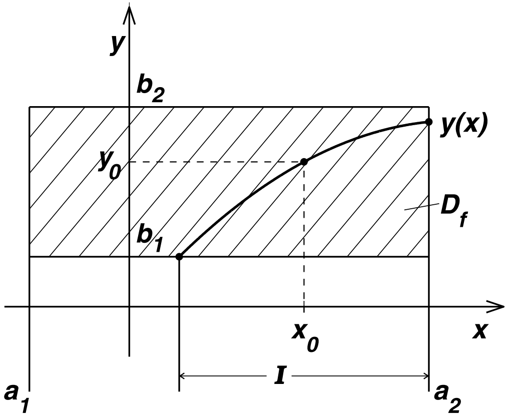

Abbildung 6.2: Zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz,
$y'(x) = f(x, y(x))$ **mit** $y(x_0) = y_0$**.**

Buch Kap. 6.3 – Bspe DGLen erster Ordnung

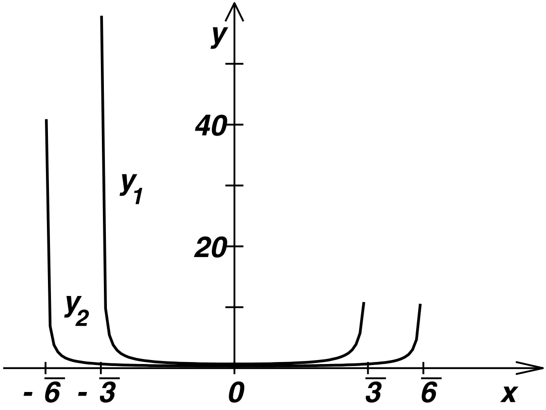

Abbildung 6.3: Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung $y' = xy^2$ für $(x_0, y_0) = (1{,}1)$, d.h. $C = 1{,}5$, und $(x_0, y_0) = (2{,}1)$, d.h. $C = 3$

Buch Kap. 6.3 – Mehrdeutigkeit

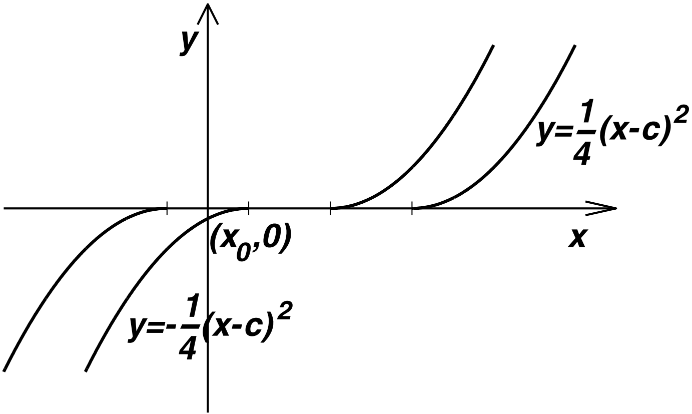

Abbildung 6.5: $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ **mit singulärer Lösung** $y(x) \equiv 0$

Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen

Lösung einer Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

1) **Schreibe die Differentialgleichung $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$ in der Form $h(y)\,y'(x) = g(x)$ bzw. $h(y)\,dy = g(x)\,dx$.**
2) **Integriere die linke Seite bezüglich y und die rechte Seite bezüglich x.**
3) **Falls möglich, löse die dadurch entstehende Gleichung**

$$H(y) = G(x) + C$$

nach y auf. Ansonsten ist die Lösung $y(x)$ in impliziter Form gegeben.

Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen

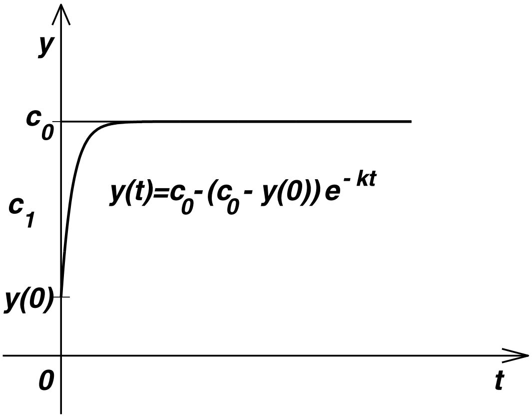

Abbildung 6.6: Chemische Reaktion 1. Ordnung

Buch Kap. 6.5 – Transformationen

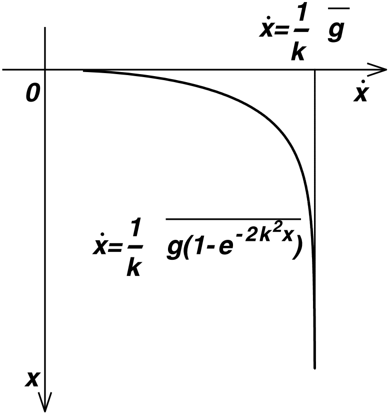

Abbildung 6.7: Fallgeschwindigkeit $\dot{x}$ eines Fallschirmspringers in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg x