Der Integralsatz von Stokes.

Satz: (Integralsatz von Stokes)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.

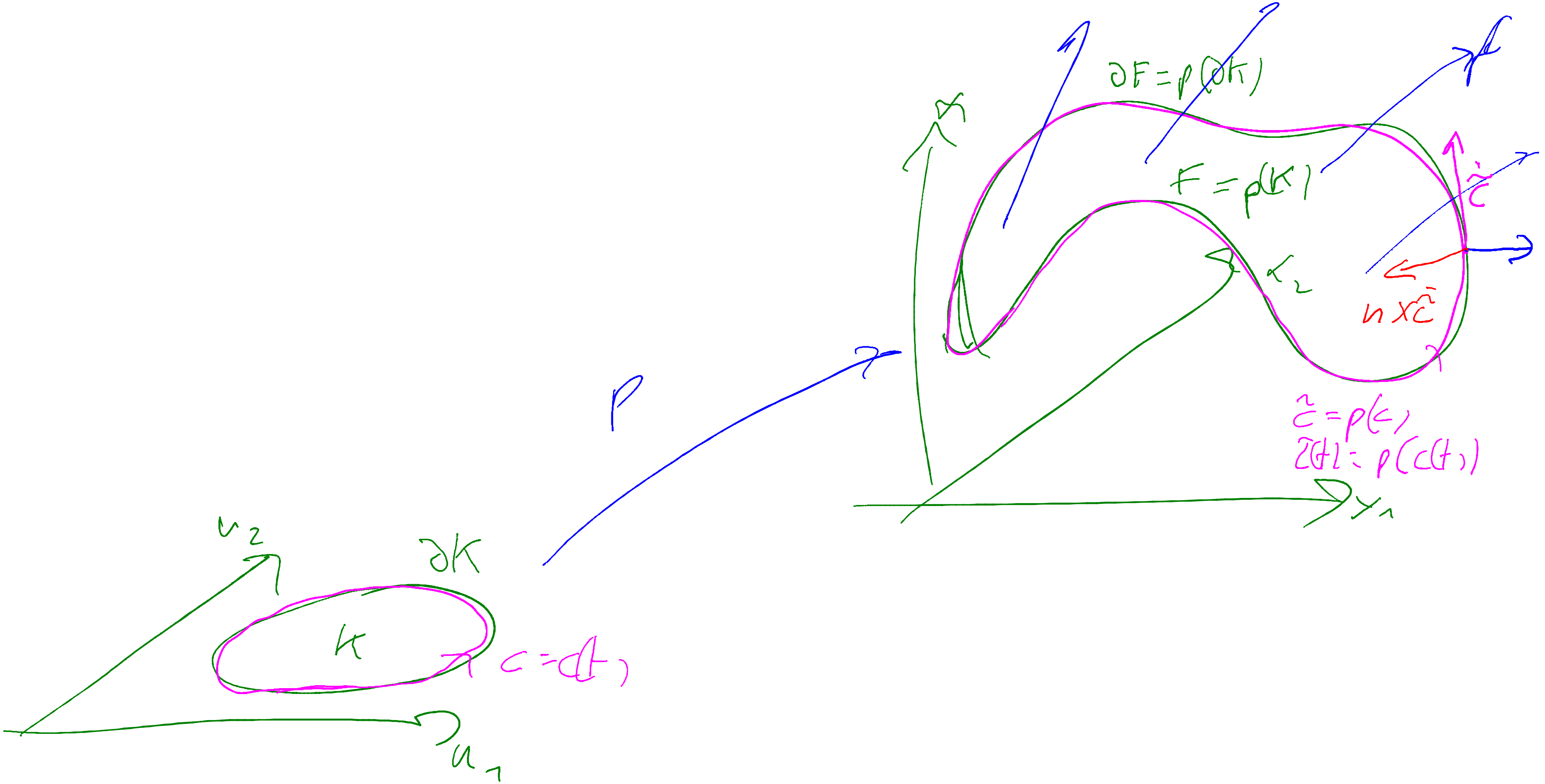
Weiter sei $F = \mathbf{p}(K)$ eine Fläche in D, $F \subset D$, mit der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, und $K \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich.

Der Rand ∂K werde durch eine stückweise glatte $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c}$ parametrisiert, deren Bild $\tilde{\mathbf{c}}(t) := p(\mathbf{c}(t))$ dann den Rand ∂F der Fläche F parametrisiert.

Die Orientierung der Randkurve $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ sei hierbei so gewählt, dass $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ in Richtung der Fläche weist.

Dann gilt

$$\boxed{\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}$$



$\partial F = p(\partial K)$
$F = p(K)$
x_2
$n \times \tilde{c}$
$\tilde{c}$
$\tilde{c} = p(c)$
$\tilde{c}(t) = p(c(t))$
y_1
p
u_2
∂K
K
$c = c(t)$
u_1

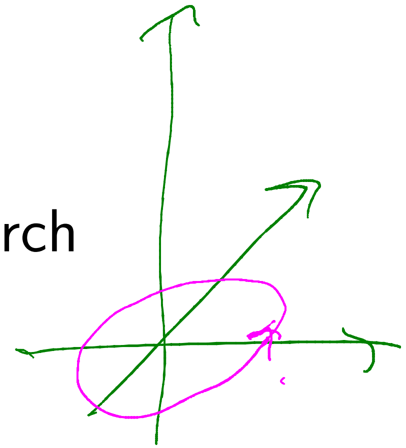
Beispiel.

Gegeben sei das Vektorfeld

$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & -z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve $\tilde{\mathbf{c}} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch



$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

$\dot{\tilde{c}} = (-\sin t, \cos t, -)$

Dann gilt:

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt$$

$f(c(t)) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

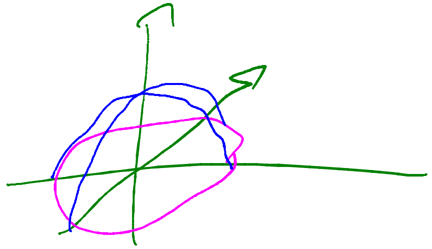
$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird:

$R=1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi,\psi)$$



mit $(\varphi,\psi) \in K = [0,2\pi] \times [0,\pi/2]$, d.h. die Fläche F ist gerade die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad = 2\pi$$

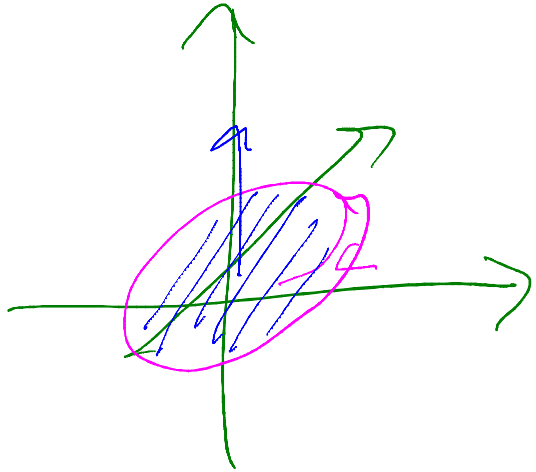
Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2\pi$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(r,\varphi) \in [0,1] \times [0,2\pi]$$



$$\int \operatorname{rot} f \, d\sigma = \iint \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(u_1,u_2) = 2 \cdot \text{Fläche Einheitskreis}$$

$$= \boxed{2\pi}$$

Komplettierung des Beispiels.

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \int_K \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi,\psi)), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} \right\rangle d\varphi d\psi$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \sin\psi\cos\psi \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beachte: Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man rechnet $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0,0,2)^T$ direkt nach, sowie

$$n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\psi \\ \sin\varphi\cos^2\psi \\ \sin\psi\cos\psi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{d\psi}(\sin^2\psi)$$

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2\sin\psi\cos\psi \, d\varphi d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi)\, d\psi = 2\pi$$