$$f(x,y) = \frac{\cos y}{1-x} = (*) \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \;\ldots \qquad \text{1d Taylor}$$

$$|x|<1$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \ldots \qquad \text{1d Taylor}$$

$$(*) = \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)\left(1 - \frac{y^2}{2} + \ldots\right)$$

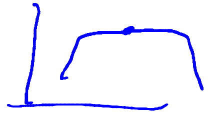
$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{T_0} + x}_{T_1} + x^2 - \frac{y^2}{2}}_{T_2}$$

Kapitel 2. Anwendungen der Differentialrechnung mehrerer Variablen

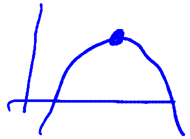
2.1 Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlichen

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{x}^0 \in D$. Dann hat $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$

- ein globales Maximum, falls $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$ für alle $\mathbf{x} \in D$.

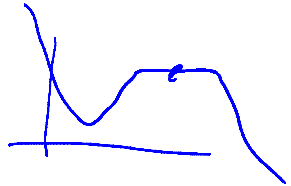


- ein strenges globales Maximum, falls $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$ für alle $\mathbf{x} \in D$.



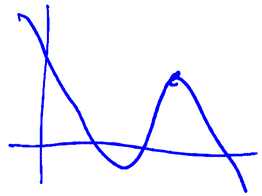
- ein lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon.$$



- ein strenges lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon.$$



Analoge Definitionen für Minima.

Notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Satz: Besitzt eine C^1–Funktion $f(\mathbf{x})$ in einem Punkt $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0 \in \mathbb{R}^n}$$

Beweis: Für ein beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$ ist die Funktion

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\varphi(t) := f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$$
$\varphi'(t) = \operatorname{grad} f(x^0 + tv) \cdot v$

in einer Umgebung von $t^0 = 0$ stetig differenzierbar.

Weiterhin hat $\varphi(t)$ bei $t^0 = 0$ ein lokales Extremum. Damit folgt:

$$0 \overset{!}{=} \varphi'(0) = \boxed{\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)\,\mathbf{v} = 0 \quad \forall v}$$

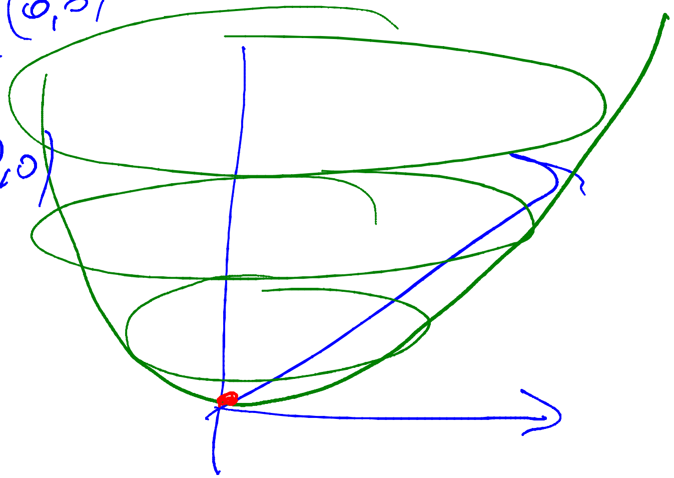
Da dies für alle $\mathbf{v} \neq 0$ gilt, folgt die Bedingung:

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = (0, \ldots, 0)^T$$

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad$ grad $f(x,y) = 2(x,y) = (0,0)$

$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Hf(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ f min $(0,0)$

p.d. $\Rightarrow$ s. l. Minimum

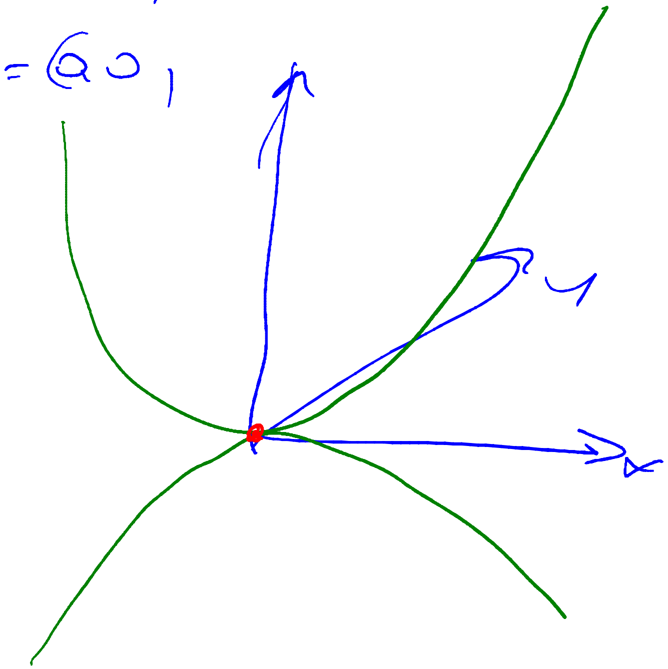


$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad$ grad $f(x,y) = 2(x,-y) = (0,0)$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = Hf(0,0)$ $\Longrightarrow$ indefinit

Sattelpunkt



kein lokales Extremum $\Longleftarrow$ grad $f(x_0) \neq 0$

lokales Extremum $\Longrightarrow$ grad $f(x_0) = 0$

$\not\Longleftarrow$

Bemerkungen:

- Die Bedingung $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0$ liefert gewöhnlich ein nichtlineares Gleichungssystem zur Berechnung von $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ mit n Gleichungen und n Unbekannten.
- Die Punkte $\mathbf{x}^0 \in D^0$ mit $\boxed{\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0}$ nennt man $\boxed{\text{stationäre Punkte}}$ von $f(x)$. Stationäre Punkte sind **nicht** notwendigerweise lokale Extremwerte. Zum Beispiel besitzt die Funktion

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x, y) = 2(x, -y)$$

und hat daher nur einen stationären Punkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$. Der Punkt $\mathbf{x}^0$ ist jedoch ein Sattelpunkt von f, d.h. in jeder Umgebung von $\mathbf{x}^0$ gibt es zwei Punkte $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ mit

$$f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^2).$$

Klassifikation stationärer Punkte.

Satz: Sei $f(\mathbf{x})$ eine C^2–Funktion auf D^0 und $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$, d.h. $\boxed{\text{grad}\, f(\mathbf{x}^0) = 0.}$

a) Notwendige Bedingung

Ist $\mathbf{x}^0$ ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$, so gilt:

$$\mathbf{x}^0 \text{ lokales Minimum} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv semidefinit}$$
$$\mathbf{x}^0 \text{ lokales Maximum} \;\Rightarrow\; \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0) \text{ negativ semidefinit}$$

b) Hinreichende Bedingung

Ist $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, so ist $\mathbf{x}^0$ ein Sattelpunkt, d.h. es gibt in jeder Umgebung von $\mathbf{x}^0$ Punkte $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ mit $f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^2)$.

Beweis des Satzes, Teil a).

Sei $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum. Für $\mathbf{v} \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein folgt aus der Taylor–Formel $\quad x = x^0 + \varepsilon v \qquad \operatorname{grad} f(x_0) = 0$

$$\text{Taylor}\quad f(x) - f(x_0) = f(\mathbf{x}^0 + \varepsilon\mathbf{v}) \underbrace{- f(\mathbf{x}^0)}_{T_0,\ T_1} = \underbrace{\frac{1}{2}(\varepsilon\mathbf{v})^T \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0 + \theta\varepsilon\mathbf{v})(\varepsilon\mathbf{v})}_{R_2} \geq 0 \qquad (1)$$

mit $\theta = \theta(\varepsilon, \mathbf{v}) \in (0, 1)$.

Der Gradient in der Taylorentwicklung verschwindet, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0$, denn $\mathbf{x}^0$ ist stationär.

Aus (1) folgt

$$\varepsilon^2\, \mathbf{v}^T \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0 + \theta\varepsilon\mathbf{v})\mathbf{v} \geq 0 \qquad (2)$$

Da $f(\mathbf{x})$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion ist, ist die Hesse–Matrix eine stetige Abbildung. Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ folgt daher aus (2),

$\varepsilon \to 0 \qquad$ weil stetig

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)\mathbf{v} \geq 0$$

d.h. $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv semidefinit.

Beweis des Satzes, Teil b).

Ist $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit, so ist $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x})$ ebenfalls in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \subset D$ um $\mathbf{x}^0$ positiv definit. Dies folgt aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen.

Für $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ gilt damit

Taylor grad $f(x_0) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T \mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0))(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}_{R_2} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

mit $\theta \in (0,1)$, d.h. $f(\mathbf{x})$ hat in $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Minimum.

Ist $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, so existieren zu Eigenwerten von $\mathbf{H}\, f(\mathbf{x}^0)$ mit verschiedenen Vorzeichen gewisse Eigenvektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ mit

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{v} > 0 \qquad \mathbf{w}^T \mathbf{H} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{w} < 0$$

und somit ist $\mathbf{x}^0$ ein Sattelpunkt.

Bemerkungen.

- Ein stationärer Punkt $\mathbf{x}^0$ mit $\det \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) = 0$ heißt ausgeartet. Die Hesse–Matrix besitzt dann den Eigenwert $\lambda = 0$.
- Ist $\mathbf{x}^0$ **nicht** ausgeartet, so gibt es 3 Fälle für die Eigenwerte von $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$:

$$\begin{array}{rcl} \text{alle EW sind strikt positiv} & \Rightarrow & \mathbf{x}^0 \text{ ist strenges lokales Minimum} \\ \text{alle EW sind strikt negativ} & \Rightarrow & \mathbf{x}^0 \text{ ist strenges lokales Maximum} \\ \text{es gibt strikt pos. und neg. EW} & \Rightarrow & \mathbf{x}^0 \text{ Sattelpunkt} \end{array}$$

- Die folgenden Implikationen gelten (aber für keine die Umkehrung)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}^0 \text{ lokales Minimum} & \Leftarrow & \mathbf{x}^0 \text{ strenges lokales Minimum} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv semidefinit} & \Leftarrow & \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv definit} \end{array}$$

Weitere Bemerkung.

- Ist $f(\mathbf{x})$ eine $\mathcal{C}^3$–Funktion, $\mathbf{x}^0$ ein stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$ und $\boxed{\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv definit}}$, so gilt die Abschätzung:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^T\,\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \geq \lambda_{min}\cdot\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|^2$$

wobei λ_{min} den kleinsten Eigenwert der Hesse–Matrix bezeichnet.

Nach dem Satz von Taylor gilt dann:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}^0) &\geq \frac{1}{2}\lambda_{min}\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|^2 + R_3(\mathbf{x};\mathbf{x}^0) \\ &\geq \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|^2\left(\frac{\lambda_{min}}{2} - C\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|\right) \end{aligned}$$

$R_3 \propto \|x-x_0\|^3$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$.

Um $\mathbf{x}^0$ wächst $f(\mathbf{x})$ somit mindestens quadratisch mit dem Abstand von $\mathbf{x}^0$.

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) := y^2(x-1) + x^2(x+1)$$

und suchen die stationären Punkte:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (y^2 + x(3x+2), 2y(x-1))^T = 0$$

$y^2 + x(3x+2) = 0$
$2y(x-1) = 0$

Die Bedingung $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ liefert die beiden stationären Punkte

$y = 0$

$x = 1 \quad y^2 = -5$

$$\boxed{\mathbf{x}^0 = (0,0)^T} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\mathbf{x}^1 = (-2/3, 0)^T.}$$

Die jeweiligen Hesse–Matrizen von f an den Stellen $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{x}^1$ lauten

$$\boxed{\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{\mathbf{H}f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}}$$

Die Matrix $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ ist indefinit, also ist $\mathbf{x}^0$ ein Sattelpunkt, $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^1)$ ist negativ definit, somit ist $\mathbf{x}^1$ ein strenges lokales Maximum von $f(\mathbf{x})$.

Kapitel 2. Anwendungen der Differentialrechnung mehrerer Variablen

2.2 Implizit definierte Funktionen

Ziel: Untersuche die Lösungsmengen von *nichtlinearen* Gleichungssystemen der Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

mit $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h. wir betrachten m Gleichungen für n Unbekannte mit

$$\boxed{m < n.}$$

Also: Es gibt weniger Gleichungen als Unbekannte.

Man nennt dann das Gleichungssystem unterbestimmt und die Lösungsmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ enthält gewöhnlich *unendlich* viele Punkte.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$$f(x,y) = x - y = 0$$

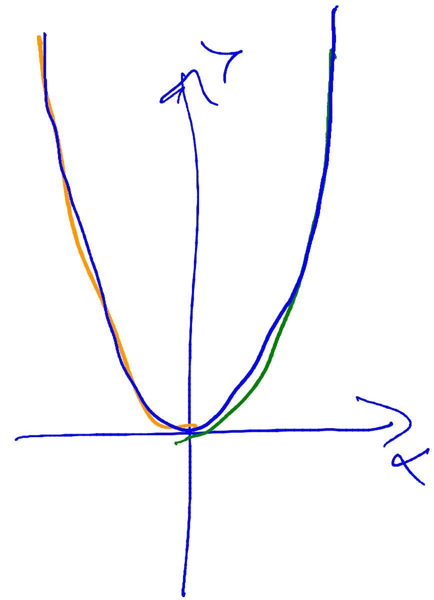
$$y = x$$

oder $x = y$

$$f(x,y) = y - x^2 = 0$$

$$y = x^2$$

$$x = \begin{cases} \sqrt{y} & y > 0 \\ -\sqrt{-y} & y < 0 \end{cases}$$



Auflösbarkeit von (nichtlinearen) Gleichungen.

Frage: Kann man das System $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ nach bestimmten Unbekannten, zum Beispiel den letzten m Variablen $\underbrace{x_{n-m+1}, \dots, x_n}_{\text{m Variablen}}$ **auflösen**?

Mit anderen Worten: Existiert eine Funktion $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-m})$ mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(x_{n-m+1}, \dots, x_n)}_{\text{m Variablen}}{}^T = \mathbf{f}\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-m})}_{\text{n-m Variablen}}$$

Terminologie: "Auflösen" bedeutet also die letzten m Variablen durch die ersten $n - m$ Variablen zu beschreiben.

Weitere Frage: Nach welchen m Variablen lässt sich das Gleichungssystem auflösen? Ist die Auflösung *global* auf dem Definitionsbereich D möglich oder nur *lokal* auf einer Teilmenge $\tilde{D} \subset D$?

Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge G von $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ lässt sich (zumindest lokal) als Graph einer Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ darstellen.

Beispiel.

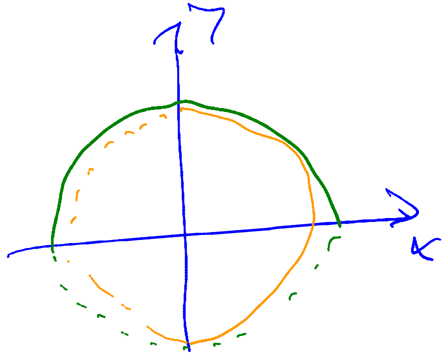
Die Kreisgleichung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad \text{mit } r > 0$$

definiert ein unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem, denn wir haben **zwei** Unbekannte (x, y), aber nur **eine** Gleichung.

Die Kreisgleichung lässt sich lokal auflösen und definiert dabei die folgenden vier Funktionen:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{r^2 - x^2}, \quad & -r \leq x \leq r \\
y &= -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad & -r \leq x \leq r \\
x &= \sqrt{r^2 - y^2}, \quad & -r \leq y \leq r \\
x &= -\sqrt{r^2 - y^2}, \quad & -r \leq y \leq r
\end{aligned}$$



Beispiel.

Sei $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ eine affin–lineare Funktion, d.h. $\mathbf{g}$ hat die Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{für } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Wir spalten die Variablen $\mathbf{x}$ in zwei Vektoren auf

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\underbrace{x_1, \dots, x_{n-m}}_{n-m \text{ Variablen}})^T \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(2)} = (\underbrace{x_{n-m+1}, \dots, x_n}_{m \text{ Variable}})^T \in \mathbb{R}^m$$

Aufspaltung der Matrix $\mathbf{C} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}]$ ergibt die Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b} = (\underbrace{c_1 \ \cdots \ c_{n-m}}_{B}\ \underbrace{c_{n-m+1} \ \cdots \ c_n}_{A}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \\ x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b = 0$$

Spalten

mit $\boxed{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}}$, $\boxed{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}}$.

Das Gleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ist genau dann nach den Variablen $\mathbf{x}^{(2)}$ (eindeutig) auflösbar, falls $\mathbf{A}$ regulär ist:

$Ax^{(2)} = -(Bx^{(1)} + b)$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{x}^{(2)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Frage: Wie kann man die Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{g}$ schreiben?

Aus der Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

$m \times m \quad \frac{\partial g}{\partial x^2} = A$

erkennt man direkt, dass

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

gilt, d.h. $\mathbf{A}$ ist die Jacobi–Matrix der Abbildung

$$\mathbf{x}^{(2)} \to \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

für festes $\mathbf{x}^{(1)}$!

Fazit: Auflösbarkeit ist somit gegeben, falls die Jacobi–Matrix regulär ist.

$\varphi(x,y) = 0 \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,?$

falls $y = y(x)$

$0 = \varphi(x,y) = \varphi(x, y(x))$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}} \Rightarrow \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$

$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} =: -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

∂f

Satz über implizite Funktionen.

Satz: Sei $g : D \to \mathbb{R}^m$ eine C^1–Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Variablen in D seien $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Der Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ sei eine Lösung von $\boxed{\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}}$.

Falls die Jacobi–Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \end{pmatrix}$$

regulär ist, so gibt es Umgebungen U von $\mathbf{x}^0$ und V von $\mathbf{y}^0$, $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{f} : U \to V$ mit

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U$$

und

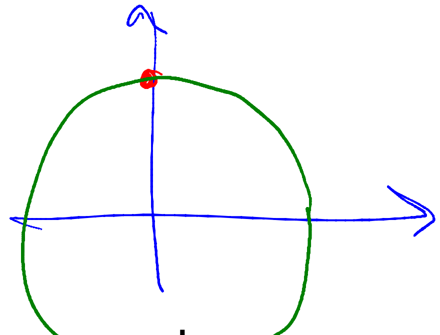
$$\boxed{J\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)}$$

Beispiel.

Für die Kreisgleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, r > 0$ findet man im Punkt $\boxed{(x^0, y^0) = (0, r)}$

nicht nach x auflösbar in $(0,r)$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(0,r) = 0,} \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(0,r) = 2r \neq 0}$$



Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann man durch implizite Diffentiation berechnen:

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_x(x, y(x)) + g_y(x, y(x))y'(x) = 0$$

$y_0 = y(x_0)$

$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = y y' = -x$

Also

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = f'(x) = -\frac{x}{y(x)}}$$

$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x_0^2}{2}$

$y^2 + x^2 = y_0^2 + x_0^2 = r^2$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Gleichung $g(x,y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$.

Es gilt $\qquad e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^{y-x} + 3 > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad \Rightarrow \text{immer nach } y \text{ auflösbar}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Implizite Differentiation liefert

$y = y(x)$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' = -e^{y-x} + 2x + (e^{y-x}+3)y' = 0$

$g(x, y(x)) = 0$

$$e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Erneute Differentiation liefert

$$e^{y-x}y'' + e^{y-x}(y'-1)^2 + 3y'' + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{2 + e^{y-x}(y'-1)^2}{e^{y-x} + 3} = h(y', y, x)$$

Aber: Explizites Auflösen nach y (mit Hilfe elementarer Funktionen) ist in diesem Fall nicht möglich!

$e^{y-x}(y'-1)^2 + e^{y-x}(y'') + 3y'' + 2 = 0$