

Richtungsableitungen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$, und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor. Dann heißt ^{stehen}

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

Special fall
 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$
 $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$

die Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung) von $f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$.

Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{v}$:

$$D_{\mathbf{v}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x + \textcolor{blue}{1}t)^2 + (y + \textcolor{blue}{1}t)^2 - x^2 - y^2}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t}$$

$$= 2(x + y)$$



$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{2} \neq 1$$

$$D_{\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}} f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2}} (x + y) = \sqrt{2} (x + y)$$

Bemerkungen.

- Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{v}$ gegeben durch die partielle Ableitung nach der Koordinatenrichtung x_i :

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

- Ist $\mathbf{v}$ ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ den **Anstieg** (bzw. die **Steigung**) von $f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$.
- Ist $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ und mit $\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$ gilt

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})|_{t=0} = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}$$

$\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$ $\mathbf{h}(0) = \mathbf{x}^0$

Dies folgt unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel.

$$(*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})}{h} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h}) \Big|_{t=0}$$

Eigenschaften des Gradienten.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathbf{x}^0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt

- a) Der Gradientenvektor $\text{grad } f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der Niveaumenge

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch Äquipotentialflächen.

- 2) Der Gradient $\text{grad } f(\mathbf{x}^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ an.

Beweisidee: ~~2.2.0~~ h Kurve $h(t_s) = \mathbf{x}_s \in N_{\mathbf{x}^0}$, $h'(t_s) = \mathbf{v}$
 $h(t) = \mathbf{x}_s$ in eine Umgebung von t_s $D_v f(\mathbf{x}_s) = 0 = \text{grad } f(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{v}$
d.h. $\perp$

- a) Anwendung der Kettenregel.

- b) Für beliebige Richtung $\mathbf{v}$ gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|\mathbf{v}\| = 1$$

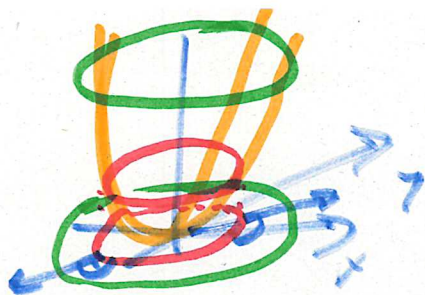
$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)| = |(\text{grad } f(\mathbf{x}^0), \mathbf{v})| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x}^0)\|_2 \underbrace{\|\mathbf{v}\|_2}_{=1}$$

Gleichheit wird für $\mathbf{v} = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) / \|\text{grad } f(\mathbf{x}^0)\|_2$ angenommen.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$N_{(1,0)} = \{x \mid f(x,y) = f(1,0) = 1\}$$

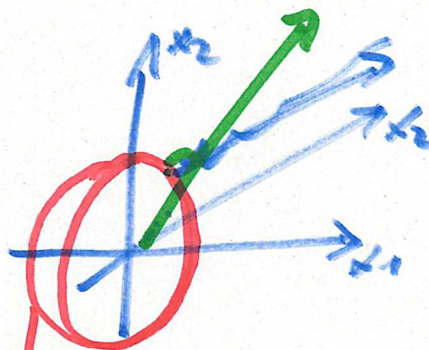
$$N_{(2,2)} = \{x \mid f(x,y) = f(2,2) = 8\}$$



$$n=2$$

$$\text{grad } f = 2(x,y)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



$$N_{(1,0,0)} = \{x \mid f(x_1, x_2, x_3) = f(1,0,0) = 1\}$$

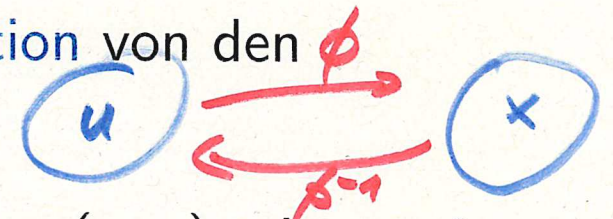
$$\text{grad } f = \frac{x}{R}$$

Krummlinige Koordinaten.

Definition: Sei $\Phi : U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathbf{u}^0 \in U$ regulär ist.

Weiterhin existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ und diese sei ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$ -Abbildung.

Dann definiert $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ eine **Koordinatentransformation** von den Koordinaten $\mathbf{u}$ auf $\mathbf{x}$.

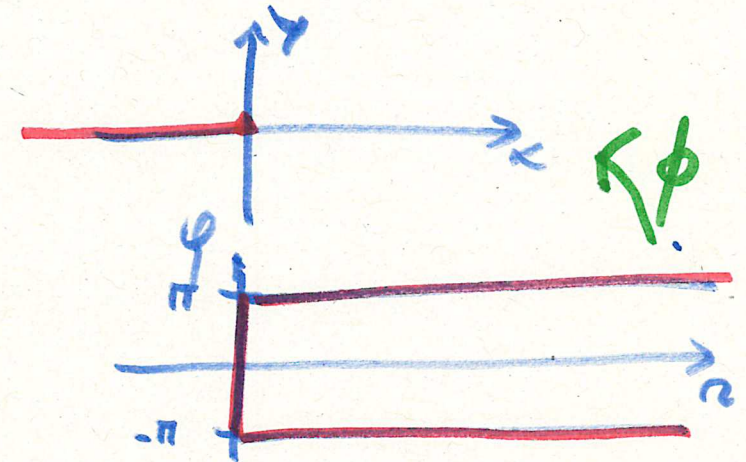


Beispiel: Betrachte für $n = 2$ die **Polarkoordinaten** $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

mit den **kartesischen Koordinaten** $\mathbf{x} = (x, y)$.



Umrechnung der partiellen Ableitungen.

Für alle $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ gelten die Relationen

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^{-1}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(\Phi(\mathbf{u})) = f(\mathbf{x}) := \tilde{f}(\Phi(\mathbf{u})) = \tilde{f}(\mathbf{x}),$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) := (g^{ij}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^T$$

Notationen.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

wobei

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J} \Phi)^{-T} = (\mathbf{J} \Phi^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf Φ^{-1} .

Beispiel: Polarkoordinaten.

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Polarkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Umrechnung des Laplace-Operator auf Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \underbrace{\cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2}}_{\text{green}} - \underbrace{\frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\text{green}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \underbrace{\sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{\text{green}} - \underbrace{\frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\text{green}}$$

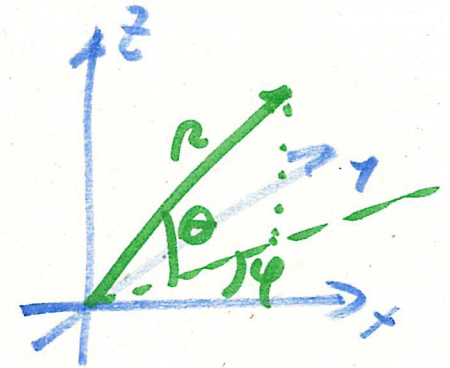
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) &= \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \\
 &= \underbrace{\cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}} - \underbrace{\frac{1}{r} \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial}{\partial r}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}
 \end{aligned}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$



Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}))^T$$

$$(\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}))^{-T}$$

Partielle Ableitungen für die Kugelkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Handwritten note: $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = (J\varphi)^{-T} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

Beispiel: Umrechnung des Laplace-Operators auf Kugelkoordinaten

Handwritten note: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$