1.2 Das vollständige Differential

i.A. kein Vektorfeld

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ heißt differenzierbar in $\mathbf{x}^0$ (oder vollständig differenzierbar bzw. total differenzierbar in $\mathbf{x}_0$), falls es eine lineare Abbildung

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

gilt, d.h.

Def von $o(\dots)$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

Das vollständige Differential und die Jacobi–Matrix.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung $\mathbf{l}$ das vollständige Differential oder das totale Differential von $\mathbf{f(x)}$ im Punkt $\mathbf{x}^0$, und man bezeichnet $\mathbf{l}$ mit $\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$.

Die zugehörige Matrix $\mathbf{A}$ heißt Jacobi–Matrix oder Funktionalmatrix von $\mathbf{f(x)}$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ und wird mit $\mathbf{J\,f}(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^0)$ oder $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\overset{A}{f'(x_0)}}_{1\times 1 \text{ Matrix}}(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0.

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$.

$n=2$

$m=1$ $f(x_1,x_2) = f(x_1^0,x_2^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) + \ldots = f(x_1^0,x_2^0) + \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)\right)}^{A\,(1\times 2)} \cdot \begin{pmatrix} x_1-x_1^0 \\ x_2-x_2^0 \end{pmatrix}$

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

a) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ auch stetig in $\mathbf{x}^0$.

b) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi–Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}} & \dots & \underbrace{\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ Df_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

c) Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ eine C^1–Funktion auf D, so ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ auf D differenzierbar.

Beweis von a).

Ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| \quad &\le \quad \underbrace{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\|}_{\to 0} \\ &\to \quad 0 \qquad \text{für } \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

$\le \|A\|\,\|x-x^0\|$

$\to 0$

Damit ist die Funktion $\mathbf{f}$ stetig im Punkt $\mathbf{x}^0$.

Beweis von b).

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $\mathbf{f}$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun $x - x^0 = t \cdot e_i$ $\quad \|x - x^0\| = |t|$

$$\underbrace{\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty}}_{\to 0} = \frac{t\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\right)}{|t|\, t} - \frac{t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|}$$

$$= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \right)$$

$$\to \quad 0 \qquad \text{für } t \to 0$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{e}_i}_{\text{ite Spalte von } A} \qquad i = 1, \dots, n$$

Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi–Matrix: $n=2, m=1$

1×2

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

- Betrachte die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ergibt sich in der Form

$n=3$ $m=2$

2×3

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2\cos(s) & 3\cos(s) \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots \end{pmatrix}$

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$1 \times n$

$\frac{\partial x}{\partial x_i} = e_i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i \\ &= \underbrace{\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{e}_i}_{\text{ite Spalte von } x^T(A^T+A)} \end{aligned}$$

ite Spalte

$e_i^T A x = (e_i^T A x)^T = x^T A^T e_i$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \text{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

Differentiationsregeln.

Satz:

a) **Linearität:** Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha\, \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \beta\, \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, differenzierbar in $\mathbf{x}^0$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\, \mathbf{df}(\mathbf{x}^0) + \beta\, \mathbf{dg}(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{J}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\, \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) + \beta\, \mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0) \end{aligned}$$

b) **Kettenregel:** Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, und ist $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$\mathbf{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{dg}(\mathbf{y}^0) \circ \mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$$

und analog für die Jacobi–Matrizen

$$\underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0)}_{k\times n} = \underbrace{\mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0)}_{k\times m} \cdot \underbrace{\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)}_{m\times n}$$

Beispiel zur Kettenregel.

Sei $\mathbf{h} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

$h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \ldots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
(f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \underbrace{\mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0))}_{1 \times n} \cdot \underbrace{\mathbf{J}\mathbf{h}(t_0)}_{n \times 1} \\
&= \operatorname{grad} f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h_k'(t_0)
\end{aligned}$$