Vektorwertige Funktionen.

Definition: Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion $\mathbf{f}$ heißt partiell differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ die Grenzwerte

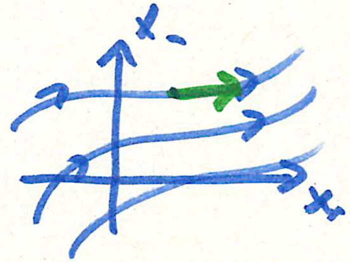
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Vektorfelder.

Definition: Für $\boxed{m = n}$ nennt man die Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf D. Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathbf{x})$ von $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ eine $\mathcal{C}^k$–Funktion, so nennt man $\mathbf{f}$ ein $\mathcal{C}^k$–Vektorfeld.



Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz in $\mathbf{x} \in D$ durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_n \end{pmatrix} =$$

oder

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln und Rotation.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha\, \mathbf{f} + \beta\, \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{f} + \beta \operatorname{div} \mathbf{g} \quad \text{für } \mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \varphi, \mathbf{f}) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{für } \varphi : D \to \mathbb{R}, \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi f_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial x_i} f_i + f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\right) = \varphi \operatorname{div} f + (f, \nabla \varphi)$$

Bemerkung: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion, so gilt für den Laplace–Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

=

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die Rotation durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Bigg|_{\mathbf{x}^0}$$

Alternativ Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g} \\ \operatorname{rot}(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f} \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2–Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0\,,$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

$$\operatorname{rot}(\varphi\cdot f) = \left(\frac{\partial(\varphi f_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\varphi f_2)}{\partial x_3},\ \frac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(\varphi f_3)}{\partial x_1},\ \frac{\partial(\varphi f_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x_2} \right) =$$

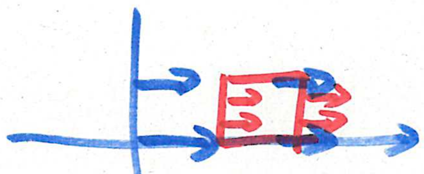
$$= \varphi \operatorname{rot} f + \underbrace{\left(f_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - f_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3},\ f_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - f_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ f_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - f_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right)}_{\nabla\varphi \times f}$$

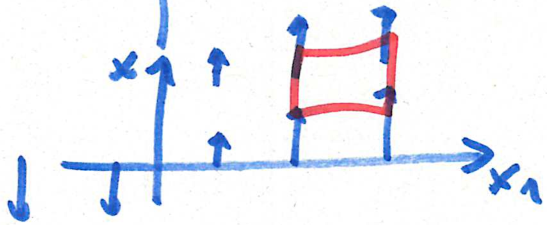
$$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \Bigg(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)}_{\substack{=0 \\ \text{weil } \varphi \in C^2}},\ \ldots \Bigg)$$

Divergenz Quellstärke

$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} f = 0$



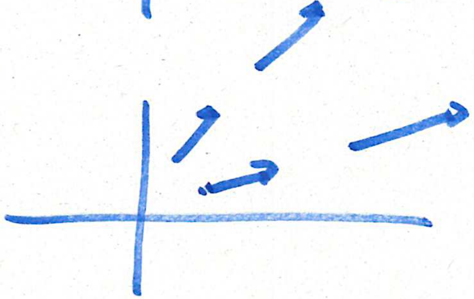


$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} f = 0$

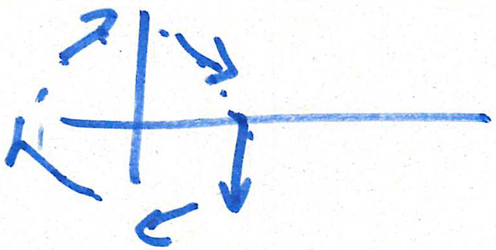
$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} f = 1$



$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

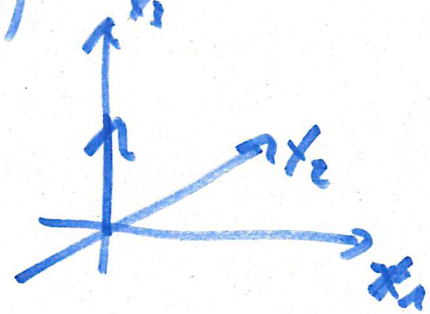
$\operatorname{div} f = 1+1=2$



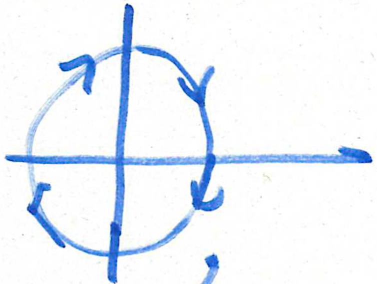
$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} f = 0$

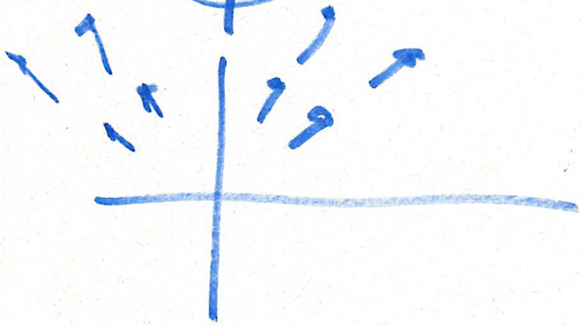
$$f = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\, f = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$



$$f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\, f = -2$$



$$f = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\, f = 0$$



$$f = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rot}\, f = 0$$