Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg Wintersemester 2024/25

basierend auf dem Foliensatz von Jens Struckmeier Wintersemster 2020/21

Inhalte der Vorlesung Analysis III.

- Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.
- 2 Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.
- Mittelwertsätze, Satz von Taylor.
- Extrema, Satz über implizite Funktionen.
- Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.
- © Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.
- Newton-Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.
- Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.
- Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.
- Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.

Kapitel 1. Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

 $f(x_1,\ldots,x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet pV = RT.

Jede der drei Größen p (Druck), V (Volumen) und T (Temperatur) läßt sich als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante ist.

$$p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$$

$$V = V(p, T) = \frac{RT}{p}$$

$$T = T(p, V) = \frac{pV}{R}$$

1.1. Partielle Ableitungen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

• $f(\mathbf{x})$ heißt in \mathbf{x}^0 nach x_i partiell differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

existiert, wobei \mathbf{e}_i den i—ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die partielle Ableitung von $f(\mathbf{x})$ nach x_i im Punkt \mathbf{x}^0 .

• Existieren für jeden Punkt \mathbf{x}^0 die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen $x_i, i = 1, ..., n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(\mathbf{x})$ stetig partiell differenzierbar oder eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

Beispiele.

• Betrachte die Funktion D=R

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine C^1 -Funktion.

• Die Funktion

$$2f(x)=1$$

$$2f(x)=1$$

$$f(x_1,x_2)=x_1+|x_2|$$

ist im Punkt $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht**!

Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

 $p(x,t) = A\sin(\alpha x - \omega t)$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die örtliche Anderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldruckes.

Differentiationsregeln

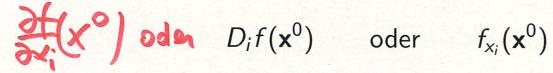
• Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}) \right) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_{i}}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_{i}}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \right) = \frac{\partial f}{\partial x_{i}}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_{i}}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i}} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_{i}}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_{i}}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^{2}} \quad \text{für } g(\mathbf{x}) \neq 0$$

• Man verwendet alternativ die Bezeichnungen:



für die partielle Ableitung von $f(\mathbf{x})$ nach x_i in \mathbf{x}^0 .

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und partiell differenzierbar.

• Man bezeichnet den Zeilenvektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)\right)$$

als Gradient von f(x) in x^0 .

Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$$

als Nabla-Operator.

So bekommt man den Spaltenvektor

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)\right)^T = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)$$

Weitere Differentiationsregeln.

Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$\operatorname{grad} (\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \operatorname{grad} f + \beta \cdot \operatorname{grad} g$$
 $\operatorname{grad} (f \cdot g) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g$
 $\operatorname{grad} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2} (g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g), \quad g \neq 0$

Beispiele:

• Sei $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt: $\mathbf{D} = \mathbf{R}^x$ $\operatorname{grad} f(x, y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x(\sin y, \cos y)$

• Für
$$r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$
 gilt
$$\operatorname{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \qquad \text{für } \mathbf{x} \neq 0,$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenvektor.

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{X_1}{X_2} = \frac{\sigma(x)}{X_2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = \frac{\sigma(x)}{X_2} = \frac{\sigma(x)}{X_2}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = \frac{\sigma(x)}{X_2} = \frac{\sigma(x)}{X_2}$$

$$y \operatorname{rod} dx = \frac{1}{n(x)} (x_1, \dots, x_n) = \frac{x}{n(x)}$$

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist nicht notwendigerweise eine stetige Funktion.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

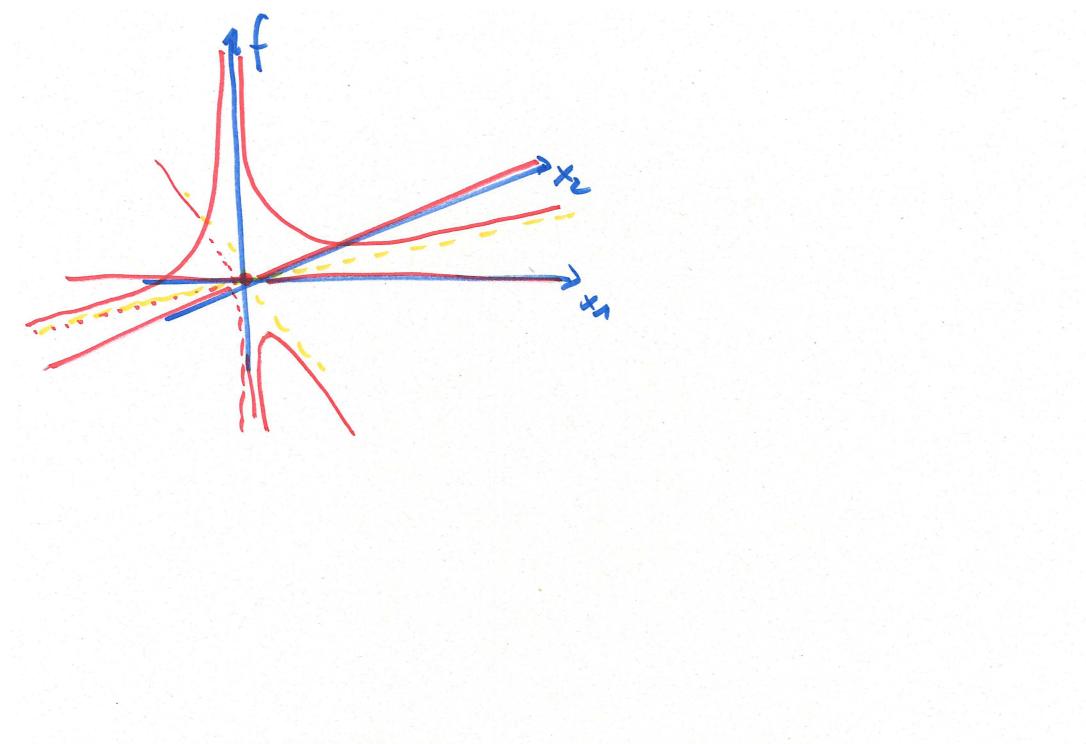
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} & : & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & : & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar, und es gilt

$$f_{x}(0,0) = f_{y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x^{2}+y^{2})^{2}} - 4\frac{x^{2}y}{(x^{2}+y^{2})^{3}}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x^{2}+y^{2})^{2}} - 4\frac{xy^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{3}}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$



Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung (0,0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t \cdot 0}{(t^2 + 0^2)^2} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^2} - 0}{t} = 0$$

Aber: Im Nullpunkt (0,0) ist die Funktion nicht stetig, denn

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \to \infty \neq 0 = \{0, 0\}$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$$

Beschränkheit der Ableitungen impliziert Stetigkeit.

Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion zu garantieren, benötigt man zusätzliche Voraussetzungen an f.

Satz: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, dort beschränkt, so ist $f(\mathbf{x})$ stetig in \mathbf{x}^0 .

Beachte: In unserem vorigem Beispiel sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Null (0,0) nicht beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

$$2f(1,1) = \frac{4}{4} - 4 \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^3} = 4 - 4 \frac{x^3 y}{$$

Beweis des Satzes.

Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_{\infty} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = [f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)] + (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0))$$

:

+
$$(f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0))$$

Für jede Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0 .

Beweis des Satzes (Fortsetzung).

Anwendung des Mittelwertsatzes auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0)$$

$$\vdots$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_n^0)\right) (x_1 - x_1^0)$$
Mit der Beschrankheit der partiellen Ableitungen gilt beschränkt

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \le C_1 |x_1 - x_1^0| + \cdots + C_n |x_n - x_n^0|$$

für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_{\infty} < \varepsilon$, und damit ist $f(\mathbf{x})$ stetig in \mathbf{x}^0 , denn es gilt

$$f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}^0)$$
 für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_{\infty} \to 0$

Höhere Ableitungen.

Definition: Eine skalare Funktion $f(\mathbf{x})$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion f(x, y):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt k-fach partiell differenzierbar, falls alle Ableitungen der Ordnung k,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \qquad \text{für alle } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

auf D existieren.

Alternative Notationen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k—ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ k—fach stetig partiell differenzierbar oder auch C—Funktion auf D. Stetige Funktionen $f(\mathbf{x})$ nennt man auch C0—Funktionen.

$$f(\mathbf{x})$$
 nennt man auch C^0 -Funktionen.

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n\ldots\partial x_1}=?$

Partielle Ableitungen sind nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen nicht beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = +1$$

d.h. $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

$$\frac{9^{k}h^{k}}{9^{k}h^{k}}(0^{1}0) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} +$$

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2 -Funktion, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung beliebig vertauschen!

Beispiel zur Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

Berechne für die Funktion 1= (3

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} .

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in \mathcal{C}^3$.

Differenziere zunächst nach z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

• Differenziere dann f_z nach x (damit fällt cosh y raus):

$$f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2}) \right)$$
$$= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2}$$

ullet Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz} = 6x^2y\cos(x^3)$$

Der Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i}$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$
 (Wellengleichung)

$$\Delta u - \frac{1}{k}u_t = 0$$
 (Wärmeleitungsgleichung)

$$\Delta u = 0$$
 (Laplace–Gleichung oder Potentialgleichung)