Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 24/25

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 7 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Sätze von Green und Gauß

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Klausurberatung: Montag 27.01. ca. 13:15 - 14:00 Audimax I

Zur Erinnerung: Kurve $\vec{c}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

gesucht Masse, wobei ρ = Dichte

Unterteile Intervall $[a,b]$

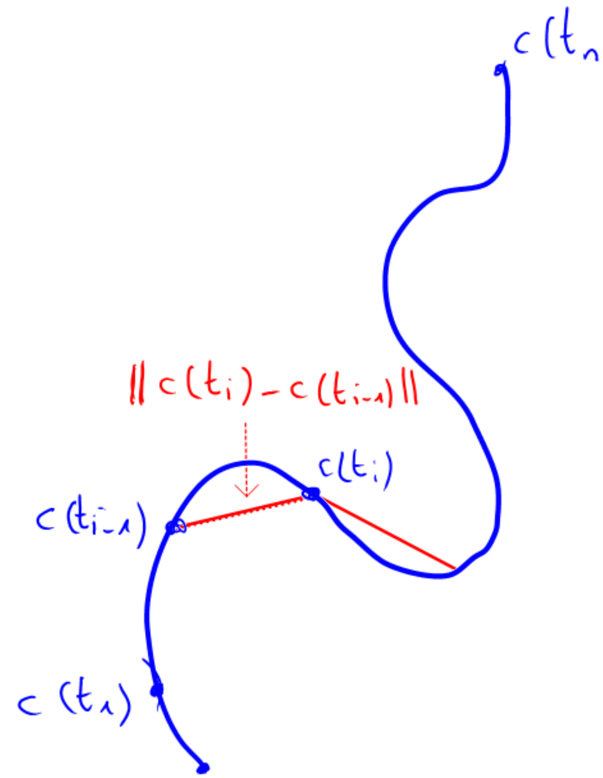
$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$$

$$\text{Masse} \approx \sum_{i=1}^{m} \rho(c(t_i)) \, \| c(t_i) - c(t_{i-1}) \|$$

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(c(t_i)) \frac{\| c(t_i) - c(t_{i-1}) \|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\int_a^b \rho(c(t)) \, \| \dot{c}(t) \| \cdot dt$$



Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stückweise C^1)

$\mathbf{c}(a) =$ Anfangspunkt, $\mathbf{c}(b) =$ Endpunkt.

Kurvenintegral über stetige skalare Funktion $g : D \to \mathbb{R}^1$

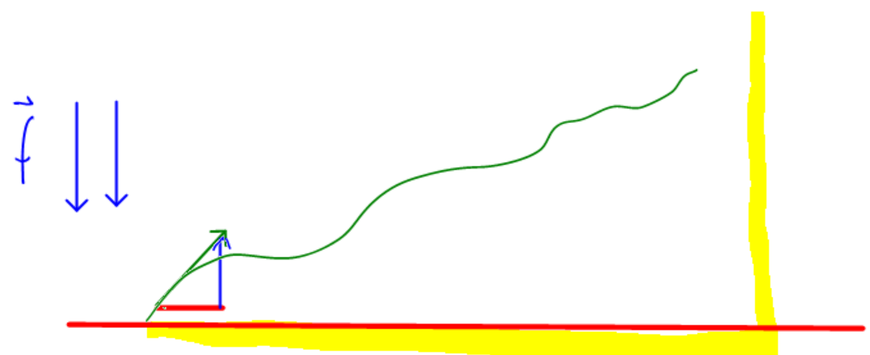
$$\int_{\mathbf{c}} g(\boldsymbol{x})ds := \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral über stetiges Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

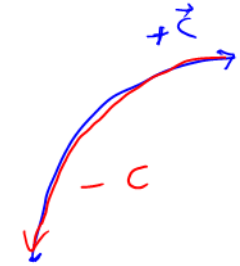
$$W := \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} := \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_a^b < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\cancel{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}} > \cancel{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} dt$$

$g(c(t))$

Motivation: $\boldsymbol{f}$ Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.



Kurvenintegral entlang rückwärts durchlaufener Kurve:

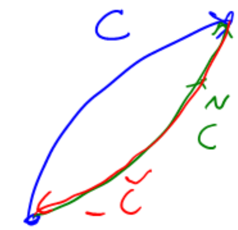


$$\int_{-\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = -\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

Kurvenintegral entlang geschlossener Kurven: $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

Ist $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so heißt

$\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ **Zirkulation** des Feldes $\boldsymbol{f}$.



Das Feld heißt **Wirbelfrei** wenn

$$\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \text{ geschlossenen } \mathbf{c}.$$

$$\oint_{c-\tilde{c}} f = \int_{c_1} f + \int_{-c_2} f = \int_{c_1} f - \int_{c_2} f = 0 \Longrightarrow \int_{c_1} f = \int_{c_2} f$$

D.h. das Kurvenintegral ist wegunabhänging. Der Wert von $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab:

$$\boxed{\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \phi(\mathbf{c}(b)) - \phi(\mathbf{c}(a))}$$

Wann geht das?

Potentiale

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld,

$\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt **Potential** von $\boldsymbol{f}$, wenn $\forall \boldsymbol{x} \in D$:

$$\boxed{\nabla\phi(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}\phi(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

Im $\mathbb{R}^3$ heißt das $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x(x,y,z) \\ \phi_y(x,y,z) \\ \phi_z(x,y,z) \end{pmatrix}$

Hauptsatz:

$$\boxed{\text{Ist } \boldsymbol{f} = \nabla\phi = (\operatorname{grad}\phi)^T, \text{ so gilt } \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \phi(\mathbf{c}(b)) - \phi(\mathbf{c}(a))}$$

Finden wir zu jedem $\boldsymbol{f}$ ein Potential?

Zur Erinnerung: $\text{rot}(\,\text{grad}\,\phi\,) = 0 \quad \forall\, C^2$ Funktionen ϕ. Siehe Präsenzblatt 2.

$$\boldsymbol{f} = (\text{grad}\,\phi)^T \implies \text{rot}\,\boldsymbol{f} = 0$$

Es kann also im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ nur dann ein Potential geben, wenn $\boxed{\text{rot}\ \boldsymbol{f} = 0}$ gilt.

Rotation des Vektorfeldes bei n=3

$$\textbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \text{det} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Rotation des Vektorfeldes bei n=2:

$$\textbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}(x,y) = 0 \iff (f_2)_x - (f_1)_y = 0$$

Für $n = 2$ oder 3:

$$\boxed{\text{rot}\,\boldsymbol{f} \neq 0 \implies \text{Es gibt kein Potential}}$$

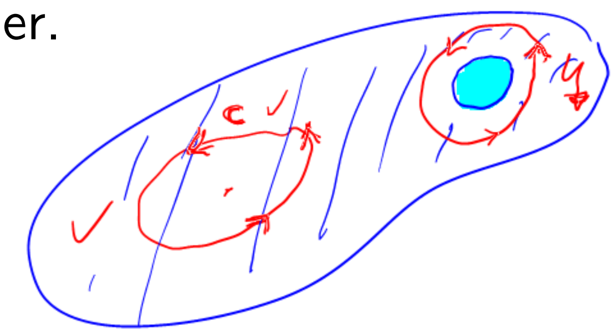
Integrabilitätsbedingung im $\mathbb{R}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{D \subset \mathbb{R}^n \text{ einfach zusammenhängend: } \; J\boldsymbol{f} \text{ symmetrisch} \iff \exists \text{ Potential}}$$

Ein Gebiet D ist Einfach zusammenhängend $\iff$

Jede geschlossene Kurve in D kann innerhalb D stetig auf ein Punkt zusammengezogen werden

$\iff$ Das Gebiet hat keine Löcher.



Konstruktion von ϕ

Beispiel 1) $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - e^x z \\ 2x^3y + \sin z \\ y\cos z - e^x \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Falls $\phi_x = 3x^2y^2 - e^x z$

dann $\xrightarrow{\int dx}$ $\phi(x,y,z) = x^3y^2 - e^x z + \underbrace{C(y,z)}_{}$ ⊛

$\Downarrow$

und $\phi_y = 2x^3y + C_y(y,z)$

andererseits $\phi_y \overset{!}{=} f_2 = 2x^3y + \sin z$

} vergleiche $\Rightarrow C_y(y,z) = \sin(z)$

$\Longrightarrow$ $C_y(y,z) \overset{!}{=} \sin(z)$

z.B. $\xrightarrow{\int dy}$ $C(y,z) = \underbrace{\sin(z)\, y + \tilde{C}(z)}_{}$

⊛

Also (*) $\phi(x,y,z) = \underline{x^3y^2 - e^x z} + \underbrace{y\sin z + \tilde{C}(z)}$

und $\phi_z = -e^x + y\cos z + \tilde{C}'(z)$ vergleiche ⟶ $\tilde{C}'(z) = 0$

andererseits $\phi_z \stackrel{!}{=} f_3 = y\cos z - e^x$

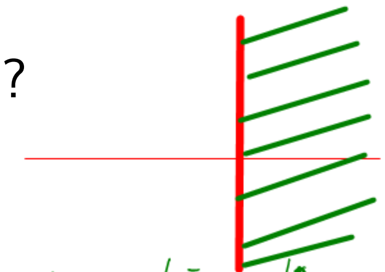
$\Longrightarrow$ $\tilde{C}'(z) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \tilde{C}(z) = k$

also $\phi(x,y,z) = x^3y^2 - e^x z + y\sin z + k \qquad k \in \mathbb{R}$

(*)

Beispiel 2) $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + \dfrac{3x^2}{1+x^3} \cdot \cos(y) \\ x^2 + \ln(1+x^3) \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} x \in \mathbb{R}^+ \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix}$

D



einfach zusammenhängend

Das sieht kompliziert aus! Lohnt sich der Versuch des Integrierens?

$$\text{rot}\, \boldsymbol{f}(x,y) = (f_2)_x - (f_1)_y$$

$$= 2x + \frac{3x^2}{1+x^3} \sin(y) - \left(2x + \frac{3x^2}{1+x^3}(-\sin(y))\right)$$

$\neq 0 \implies \nexists$ Potential

$\implies \nexists$ Potential

Beispiel 3) $D = \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz\cos(x) \\ z\sin(x) + 2y + z \\ y\sin(x) + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

$$J\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z \\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z \\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & z\cos(x) & y\cos(x) \\ z\cos(x) & \ldots\ldots & \sin(x)+1 \\ y\cos(x) & \sin(x)+2 & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Jf nicht symmetrisch

$\Longrightarrow$ $\nexists$ kein Potential

Beispiel 4: (Wiederholungsklausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

Auf c

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \quad t \in [1,3].$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

z.B. $(f_3)_x = 2x \neq (f_1)_z = -\frac{x}{z^2}$ $\Longrightarrow$ $J\,K(x,y,z)$ nicht symmetrisch

$\Longrightarrow$ $\nexists$ Potential

Lösung: $\int_a^b \langle \overset{K}{f}(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \, dt = ?$

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) := \begin{pmatrix} \frac{\cancel{t}\cos(t)}{\cancel{t}} \\ \frac{\cancel{t}\sin(t)}{\cancel{t}} \\ t^2\underbrace{(\cos^2(t)+\sin^2(t))}_{1} \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) + t(-\sin(t)) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$< K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > \; = < \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) - t \cdot \sin(t) \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$= \left(\cos^2(t) - \cancel{t \sin(t) \cos(t)} + \sin^2(t) + \cancel{t \sin(t) \cos(t)} + t^2\right)$$

$$\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{1}$$

$$\int_1^3 < K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > \, dt = \int_1^3 (1 + t^2)\, dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}.$$

Beispiel 5: (Klausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$(f_2)_x - (f_1)_y = y^2 - 2y \neq 0 \implies$ Kein Potential

$(g_2)_x - (g_1)_y = 2y - 2y = 0$ ✓

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x}, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x}.$$

Lösung:

a) $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \neq \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2} \Longrightarrow$

<u>es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}$.</u>

$\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}$

$\phi_x = y^2 \longrightarrow \phi = y^2 x + c(y)$ (*)

$\longrightarrow \phi_y = \underline{2yx} + c'(y) \overset{!}{=} \underline{2xy}$

$\Longrightarrow c'(y) = 0 \xrightarrow{z.B.} c(y) = 0$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \phi(x,y) = xy^2$ ist ein Potential zu g

b) $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$

x, y

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(t) \cdot t^2 \end{pmatrix}$

$< \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > = < \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} >$

$= \underline{-\sin(t)\, t^2 + t^2 \cos(t)}$

$u \cdot \quad \dot{v}$ $\qquad$ $\dot{u}(t) = 2t$, $v = \sin(t) + \cos(t)$

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_0^{2\pi} t^2(\cos t - \sin t)\, dt$$

$\tilde{u} \qquad \dot{\tilde{v}}$ $\qquad$ $\tilde{v} = \sin(t) - \cos(t)$

$$= t^2(\cos t + \sin t)\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t(\cos t + \sin t)\, dt$$

$u \cdot \quad v \qquad \dot{u} \quad v$

$\tilde{u} \quad \tilde{v}$

$$= 4\pi^2 \cdot 1 - [\,2t(\sin t - \cos t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2(\sin t - \cos t)dt = 4\pi^2 + 4\pi\,.$$

$4\pi\,(0 - 1) - 0 \qquad \dot{\tilde{u}} \qquad \to 0$

Für $\boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ gilt mit dem Potential $\phi(x, y) = xy^2$

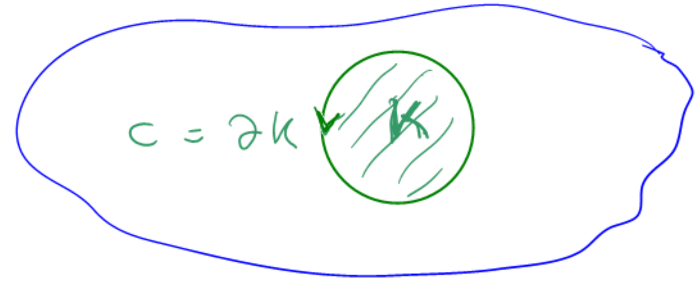
$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{g}(\mathbf{c}(t)),\, \dot{\mathbf{c}}(t) > dt$$

$$= \phi(\mathbf{c}(\overset{2\pi}{b})) - \phi(\mathbf{c}(\overset{0}{a})) = \phi\begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ 2\pi \end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix} \cos(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (2\pi)^2 - 1 \cdot 0^2$$

$$= 4\pi^2$$

Satz von Green:



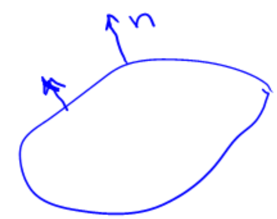
$\boldsymbol{f}$: C^1 Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet.
$K \subset D$: kompakt und bzgl. beider Variablen projizierbar.
$\mathbf{c}(t)$ stkw. C^1 Parametrisierung von ∂K, positiv umlaufen, dann

$$\boxed{\underbrace{\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Kurvenintegral}} = \oint_{\mathbf{c}} < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{T} > ds = \underbrace{\int_K \operatorname{rot}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Bereichsintegral}}}$$

Bei Strömungen: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = 0$: Wirbelfreiheit

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

Gleiche Formel für $\tilde{f} = (-f_2, f_1)$ liefert:



$$\boxed{\oint_{\partial K} < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{n} > ds = \underbrace{\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Bereichsintegral}}}$$

Bei Strömungen: **Fluss der Strömung aus Rand K heraus**:
$\operatorname{div}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = 0$: Quellen- und Senkenfreiheit

Beispiel 6: Green (Alte Klausure, Stuckmeier/Kiani)
Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \le 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\, d(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \dfrac{y^3}{3} \\ \dfrac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f(x,y) = (f_2)_x - (f_1)_y = x^2 + y^2$$

Lösung:

Da f selbst nicht sehr integrierfreundlich aussieht, dafür aber

$$\text{rot } f(x,y) = x^2 + y^2$$

verwendet man den Satz von Green und erhält

$$= \int_D \text{rot } f(x,y)\, d(x,y)$$

$$I := \int_{\partial D} f(x,y)ds = \int_D (x^2+y^2)\, d(x,y)$$

$x = r\cos(\varphi)$

$y = r\sin(\varphi)$

$x^2 + y^2 = r^2 \leq 4$

$0 \leq r \leq 2$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$f(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\phi\, dr = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi.$$

Subst.

$$= \int_0^2 \left(\left. r^3 \varphi \right|_0^{2\pi} \right) dr = 2\pi \int_0^2 r^3\, dr$$

$$= 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi$$

Beispiel 7: Gauß/Fluss (Alte Klausur, Stuckmeier/Kiani) Gegeben seien die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

und das das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{f}$

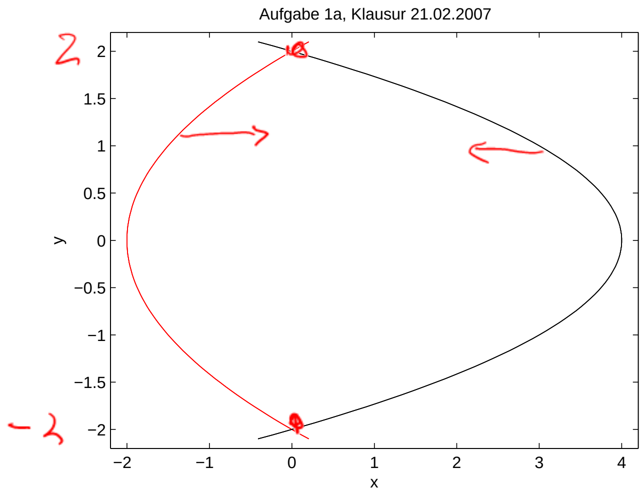
$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y} \cos y \\ 2y + e^{-x} \sin x \end{pmatrix} .$$

$\operatorname{div} f(x,y) = (f_1)_x + (f_2)_y$

$= 1 + 2 = 3$

Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{f}$ durch den Rand der Menge D.

Wie man der Skizze entnimmt gilt (vgl. Hausaufgabe 1, Blatt 6)



$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, -2 \le y \le 2, \, \frac{y^2}{2} - 2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$$

Der Fluss F ergibt sich nach dem Satz von Green/Gauß in der Ebene:

$$F = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{f}(x,y)}_{3} \, dx \, dy = \int_{-2}^{2} 3x \Big|_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} dy$$

$$= \int_{-2}^{2} 3\left((4 - y^2) - \left(\frac{y^2}{2} - 2\right) \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{2} 3\left(6 - \frac{3}{2}y^2\right) dy = 3\left[6y - \frac{y^3}{2}\right]_{-2}^{2} = 3\left[12 - 4 - (-12 + 4)\right] = 48.$$

Oberflächenintegrale

F = **Fläche im** $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(u,v) \,;\, (u,v)^T \in K \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Parameterbereich

K : kompakt, $\partial p/\partial u$, $\partial p/\partial v$ linear unabhängig

Beispiel:

Kugel mit Radius 2 um Null: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

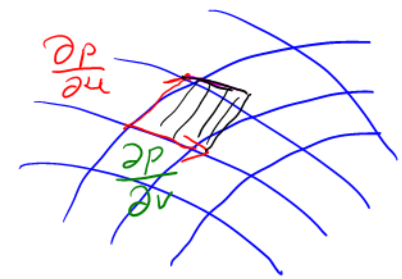
In Kugelkoordinaten:

Kugel: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\ \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ r \in [0, 2]$$

Kugeloberfläche: F : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(\phi\,,\theta) = \begin{pmatrix} 2\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \end{pmatrix}$

Parameterbereich: K : $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Flächeninhalt einer Fläche F im $\mathbb{R}^3$:



Näherung: Summe von Flächen von Parallelogrammen

Fläche Parallelogramm mit Seiten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$

Immer feinere Näherung: Summe $---\!>$ Integral

$$\text{Flächeninhalt} = \int_K 1 \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v) =: \int_{p(K)} 1 \cdot dO := \int_F dO$$

$$dO := \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

Oberflächenintegral 1. Art: $f :\longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$I_1 = \int_F f\,dO := \int_{p(K)} f \cdot dO = \int_K f(p(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

Beispiel: Masse$= \int_F$ Dichte dO

Oberflächenintegral 2. Art: $\boldsymbol{f} :\longrightarrow \mathbb{R}^3$

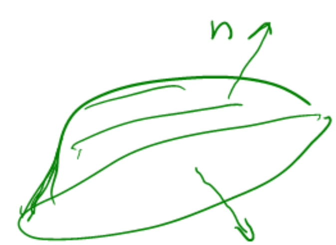
$$\frac{\frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}}{\cancel{\left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\|}}$$

$$I_2 = \int_F \boldsymbol{f}\,dO := \int_{p(K)} \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v)), \boldsymbol{n} > \cdot \cancel{\left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\|} d(u,v)$$

$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v))\,, \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > \ d(u,v)$$

Beispiel: $\boldsymbol{f}$ = Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung $\Longrightarrow$

I_2 = Fluidmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche hindurch fließt

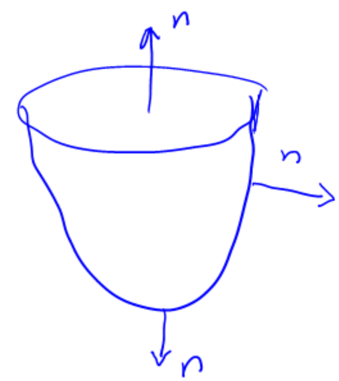


Integralsatz von Gauß

Sei G kompakt, meßbar, Standardbereich im $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\int_G \operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}}_{\text{Bereichsintegral im } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\int_{\partial G} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \underbrace{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}_{\text{äußere Normale}} \quad > dO}_{\text{Oberflächenintegral 2. Art}}$$

$$= \int_K < \boldsymbol{f}(p(u,v))\,, \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} > \quad d(u,v)$$



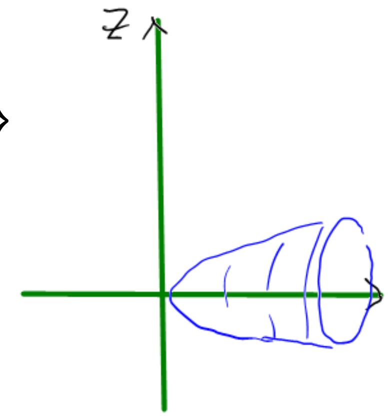
$\underbrace{\text{bei richtiger Reihenfolge im Kreuzprodukt}}_{\text{muss nach Außen zeigen}}$

Beispiel 8: Gegeben seien das Flächenstück

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \underbrace{y^2 + z^2 \,\le\, 4}_{\text{Kreisscheibe}} \,,\; x = y^2 + z^2 \right\}$$

$y = r\cos(\varphi)$

$z = r\sin(\varphi)$



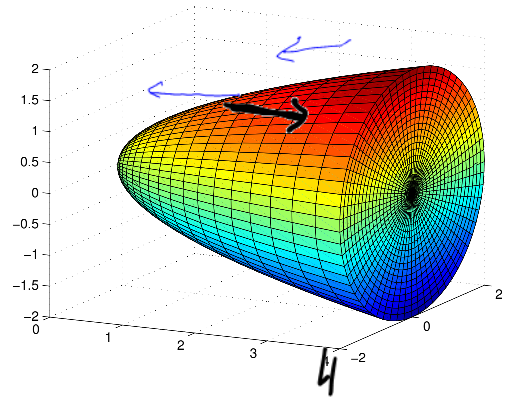
und das Vektorfeld

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\,do$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluss von f durch die Oberfläche des Körpers

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; y^2 + z^2 \,\le\, 4 \,,\; y^2 + z^2 \,\le\, x \,\le\, 4 \right\} ?$$



c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

$y = r\cos(\varphi)$
$z = r\sin(\varphi)$
$x = r^2$

$y^2 + z^2 = r^2$

Lösung: $y^2 + z^2 \, \leq \, 4 \, , \, x = y^2 + z^2$

$$\text{a)} \quad p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}$$

$$\partial p \, / \, \partial \phi \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \partial p \, / \, \partial r \; = \; \begin{pmatrix} 2r \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Erste Koordinate von $\frac{\partial p}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p}{\partial r}$

$-r\sin^2(\varphi) - r\cos^2(\varphi) = -r\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) = -r$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 2r^2\cos(\phi) \\ 2r^2\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$r^2 + 2(\overbrace{y^2+z^2}^{r^2}) = 3r^2$$

(**) $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{r^2}{\overset{\|}{x}} + 2y^2 + 2z^2 \\ y + \overset{r^2}{\overset{\|}{x}} - z \\ z + \overset{r^2}{x} - y \end{pmatrix} \qquad p(r,\phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$r\sin(\varphi) = y$

$r\cos(\varphi) = z$

$$f(p(r,\phi)) = \begin{pmatrix} 3r^2 \\ r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \\ r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r^2 \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\varphi) \end{aligned}\right\} \text{einsetzen in } **$$

$$< f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > = -r(3r^2) + (2r^2\cos(\phi)) \cdot (r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)))$$

$$+ (2r^2\sin(\phi)) \cdot (r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)))$$

$$= \underbrace{-3r^3}_{-3r^3} + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + \underbrace{2r^3(\underbrace{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}_{1}}_{2r^3} - \underbrace{2\cos(\phi)\sin(\phi)}_{\text{Tipp } = \sin(2\varphi)})$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} < f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > d\phi dr =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} -r^3 + \underbrace{2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(-\sin(2\phi))}_{\rightarrow 0} \, d\phi dr = -8\pi$$

$$= \int_0^2 \left[-r^3 \varphi + 2r^4 (\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) + r^3 \cos(2\varphi) \right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^2 -r^3 \cdot 2\pi + 2r^4 \left(\overset{0}{\sin(2\pi)} - \overset{1}{\cos(2\pi)} - \overset{0}{\sin(0)} + \overset{1}{\cos(0)} \right) + r^3 \left(\overset{1}{\cos(4\pi)} - \overset{1}{\cos(0)} \right) dr$$

$$= \int_0^2 -2\pi r^3 \, dr = -\pi \frac{r^4}{2} \Big|_0^2 = -8\pi$$

b) Fluss durch die Oberfläche des Körpers $P:\ y^2+z^2 \le 4\,,\ \overset{r^2}{y^2+z^2} \le x \le 4$

$y = r\cos(\phi)\,, \quad z = r\sin(\phi)$ mit $\phi \in [0,2\pi]\,,\ r \in [0,2]\,.$

$x = x$ mit $r^2 \le x \le 4$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{div}\,(\boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

Zylinderkoordinaten!

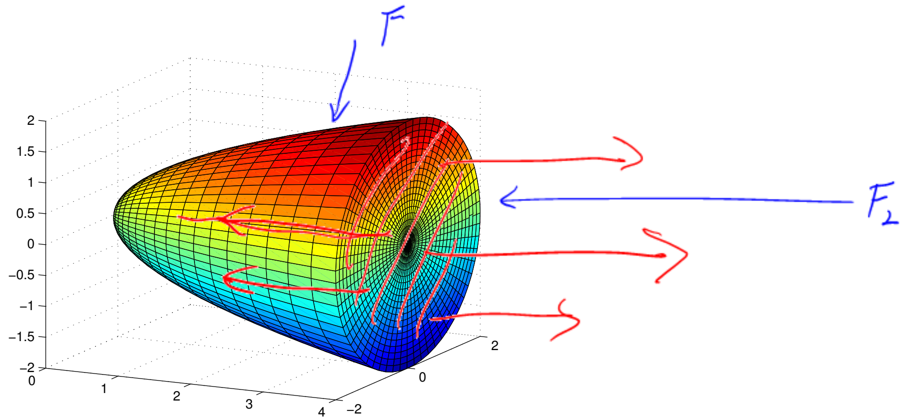
$$\int_P \text{div}\,(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{4} 3\ r\ dx\,d\phi\,dr = \iint_0^{2\pi} \underbrace{3rx\Big|_{r^2}^{4}}_{3r(4-r^2)} d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^2 \underbrace{3r(4-r^2)\,\varphi\,\Big|_0^{2\pi}}_{3r\cdot(4-r^2)\cdot 2\pi} dr = 6\pi \int_0^2 r(4-r^2)\,dr = 24\pi.$$

$$= 6\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 6\pi\,[8-4] = 24\pi.$$

c) Der Rand von P setzt sich zusammen aus zwei Flächenstücken, nämlich



die Fläche aus Teil a) und

das Flächenstück F_2 mit

$$\underline{\underline{x = 4}}\,, \quad y = r\cos(\phi)\,, \quad z = r\sin(\phi)$$

$$\phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]\,.$$

Nach Gauß gilt:

$$\underset{24\pi}{\text{Gesamtfluss}} = \underset{-8\pi}{\text{Fluss durch } F} + \underbrace{\text{Fluss durch } F_2}_{\text{muss } 32\pi \text{ sein}} = \int_K \text{div}\,(x, y, z)\, d(x, y, z)$$

Der Fluss durch F_2 ist viel einfacher zu berechnen als Fluss durch $F_{\cancel{2}}$

F_2 :

$$p(r,\phi) = \begin{pmatrix} 4 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$\times$ ergibt 0

$\times$

$-r\sin^2(\varphi) - r\cos^2(\varphi)$

$-r(\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{1})$

$= -r$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_1(x,y,z) = x + \underbrace{2(y^2 + z^2)}$$

$\begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt nach innen

$$<\ f(p(r,\phi)), \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ >=< \begin{pmatrix} 4+2r^2 \\ \text{egal !} \\ \text{egal !} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >= 4r + 2r^3$$

Vorzeichen geändert, damit der Vektor nach Außen zeigt!

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \underline{4r + 2r^3 d\phi\, dr} = 2\pi \left[2r^2 + \frac{r^4}{2} \right]_0^2 = \underbrace{32\pi}_{\text{durch } F_2}$$

Äußere Normale muss positive x-Koordinate haben!

Zusammen mit b) erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche wie (nach Teil a)) erwartet

Fluss durch F = Gesamtfluss - Fluss durch F_2

$= 24\pi - 32\pi = -8\pi.$ Deutlich einfacher als die direkte Berechnung in a)