Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 24/25

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Bereichsintegrale, Transformationssatz,

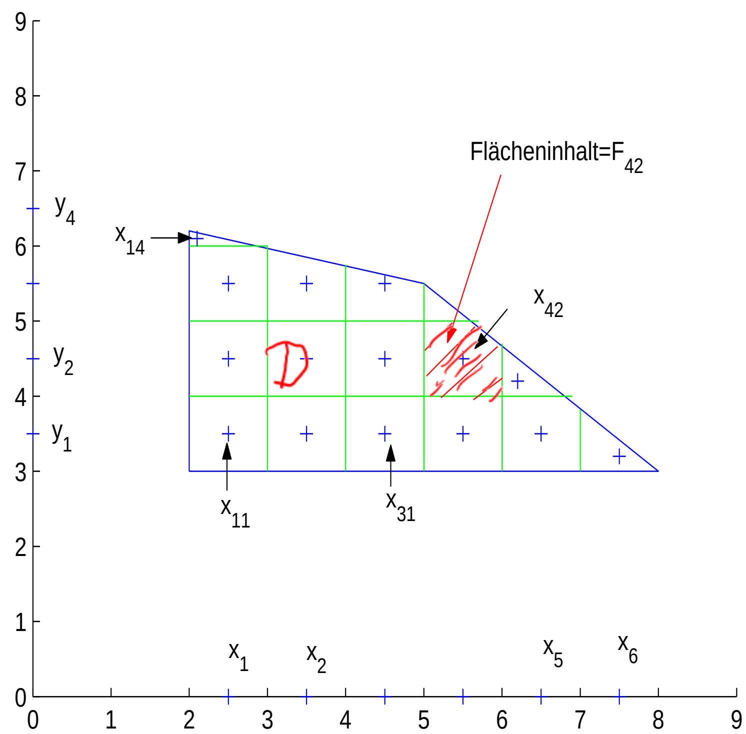
Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Bereichsintegrale :

Beispiel: Gegeben Dichte $\rho(x,y)$. Gesucht Masse.

Näherung : dichte konstant auf jedem Kästchen $\longrightarrow$

$$M \approx \sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij}$$



Für immer feinere Unterteilung sollte das Ganze gegen die Masse gehen.

$$\sum_i \sum_j \overbrace{\rho(x_i, y_j)}^{1} F_{ij} \longrightarrow \int_D \rho(x, y)\, d(x, y)$$

Allgemeiner sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, : Die Größe $f(\boldsymbol{x})$ wird über den Bereich D „aufsummiert".

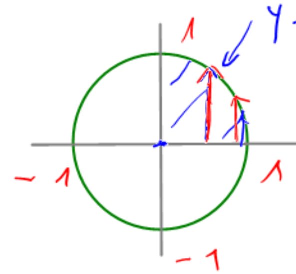
Speziell für $f = 1$ erhält man im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

$$\int_D 1\, d\boldsymbol{x} \quad = \text{Flächen- bzw. Volumeninhalt von } D$$

Analog partieller Ableitungen : immer nur eine aktuelle Variable

Integration wie im $\mathbb{R}^1$

Beispiel 1:



$y = \sqrt{1-x^2}$

$x \in [0,1]$

$f(x,y) = xy$ soll über

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x, y \ge 0 \right\}$$

Rand $x^2+y^2=1$

$\left.\begin{array}{l} y^2 = 1-x^2 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} y = \sqrt{1-x^2}$

integriert werden.

Ziel: Beschreibe Bereich durch Angabe von obere und untere Schranken von x und y. Zum Beispiel

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

oder

$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$$

Im unteren Fall:

$$\int_D f(x,y)\,d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} yx\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 y\left(\frac{\sqrt{1-y^2}^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) dy$$

$$\frac{1}{2}\,y(1-y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y - y^3\,dy$$

ACHTUNG: $\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ ist UNSINN!

Zum Beispiel: Fläche Viertelkreis also $f(x,y)=1$

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \left[\int_0^1 1\,dy\right] dx = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \underbrace{[y]_0^1}_{1-0}\,dx = [x]_0^{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{1-y^2} \overset{?}{=} \text{Fläche} \lightning$$

Normalbereich im $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{a \le x \le b}_{\text{feste Zahlen}}, \quad h(x) \le y \le g(x) \text{ bzw. } \underbrace{a \le y \le b}_{\text{feste Zahlen}}, \quad h(y) \le x \le g(y)$$

Normalbereich im $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{a \le x \le b}_{\text{feste Zahlen}}, \quad h(x) \le y \le g(x), \quad \tilde{h}(x,y) \le z \le \tilde{g}(x,y) \qquad \text{bzw. permutiert}$$

Integration z.B.

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \left[\int_{\tilde{h}(x,y)}^{\tilde{g}(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy\, dx$$

Volumen, Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment

$D \subset \mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$ kompakt, meßbar, $\rho(\boldsymbol{x})$ Massendichte

Volumen (Flächeninhalt): $V = \int_D 1\, d\boldsymbol{x}$

Masse: $M = \int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$

Zum Bsp im $\mathbb{R}^3$: $X_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int \rho\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x,y,z)$

Schwerpunkt: $X_s = \dfrac{\int_D \rho(\boldsymbol{x})\, \vec{\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x}}{\underbrace{\int_D \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}_{M}}$ (komponentenweise)

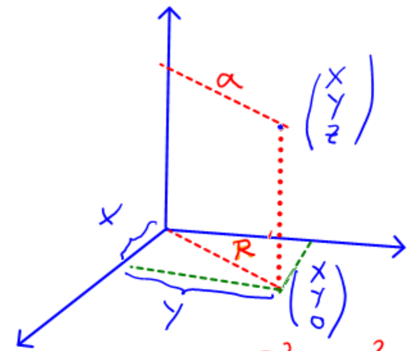
$x_s = \frac{1}{M} \int_D x \cdot \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$

$y_s = \frac{1}{M} \int_D y \cdot \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$

$z_s = \frac{1}{M} \int_D z \cdot \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$

Trägheitsmoment:

$$\Theta_A = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, a^2(\boldsymbol{x})\, d\vec{\boldsymbol{x}} \qquad a(\boldsymbol{x}) = \text{Abstand von } \boldsymbol{x} \text{ zur Achse } A$$



Beispiele für Abstände:

Abstand zur $z-$Achse im $\mathbb{R}^3$: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Abstand zur $x-$Achse im $\mathbb{R}^2$: $\sqrt{y^2} = |y|$.

$R^2 = a^2 = x^2 + y^2$

$a = \sqrt{x^2 + y^2}$

Vgl. Bsp. 5

Seite 22

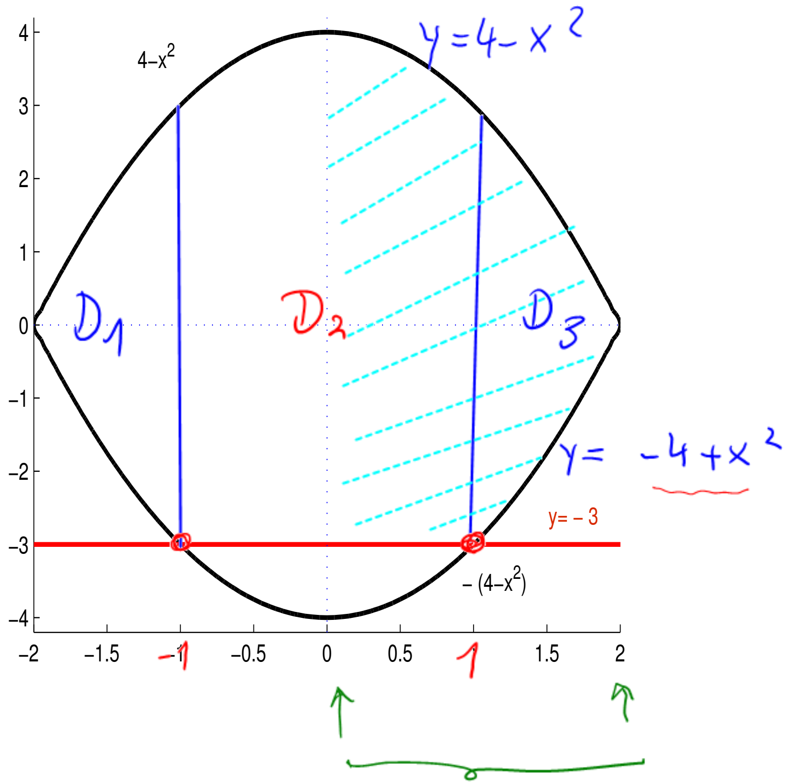
Beispiel 2: Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, \underline{-2 \le x \le 2}, \; \underline{y^2 \le (4-x^2)^2}\, , \; \underline{y \ge -3} \right\}.$$

$-(4-x^2) \le y \le (4-x^2)$

$-3 = -4 + x^2 \iff x^2 = 1$

$x = \pm 1$



D_1 : $-2 \le x \le -1$

$-4 + x^2 \le y \le 4 - x^2$

D_2: $-1 \le x \le 1$

$-3 \le y \le 4 - x^2$

D_3 : $1 \le x \le 2$

$-4 + x^2 \le y \le 4 - x^2$

Schreiben Sie D als Vereinigung von Normalbereichen.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte $\rho = 3$.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$D_1 : -2 \leq x \leq -1, \qquad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$D_2 : -1 \leq x \leq 1, \qquad -3 \leq y \leq 4 - x^2$$

$$D_3 : 1 \leq x \leq 2, \qquad x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2$$

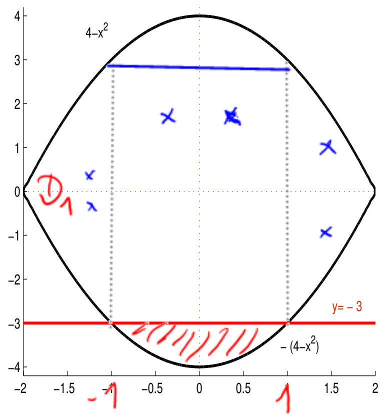
$$\textbf{Fläche:}\quad F = \underset{\text{Symmetrie genutzt}}{2}\left[\underbrace{\int_0^1 \left[\int_{-3}^{4-x^2} 1\,dy\right]dx}_{D_2 \text{ rechte Seite}} + \underbrace{\int_1^2 \left[\int_{x^2-4}^{4-x^2} 1\,dy\right]dx}_{D_3}\right]$$

$$y\Big|_{-3}^{4-x^2} = 4-x^2+3 \qquad y\Big|_{x^2-4}^{4-x^2} = 4-x^2-x^2+4$$

$$\begin{aligned}
&= \quad 2\left(\int_0^1 (\underline{7-x^2})\,dx + \int_1^2 (\underline{8-2x^2})\,dx\right)\\
&= \quad 2\left(\left[7x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[8x-\frac{2x^3}{3}\right]_1^2\right)\\
&= \quad 2\left(7-\tfrac{1}{3}+16-\tfrac{16}{3}-8+\tfrac{2}{3}\right) = 2\cdot\left(15-\tfrac{15}{3}\right) = 20.
\end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$\textbf{Masse}\ :\ M = \int_D \rho\, d(x,y) = 3 \int_D 1\, d(x,y) = 3 \times \text{Fläche} = 3\,F$$



Achsensymmetrie zur y-Achse, ρ konstant

$\longrightarrow x_s = 0$

$$x_s = \frac{1}{M} \int_D x \cdot \rho(x,y)\, d(x,y) = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

?

$$y_s = \frac{1}{M} \int_D y \cdot \rho(x,y)\, d(x,y)\,, \qquad \text{wobei } \int_D = \int_{D_1} y \cdot \rho + \int_{D_2} y \cdot \rho + \int_{D_3} y \cdot \rho$$

Es gilt $\int_{D_1} y \cdot \rho(x,y) = \int_{D_3} y \cdot \rho(x,y) = 0$ (Symmetrie).

Achsensymmetrie von D_1 und D_3 bzgl. x-Achse

Also erhält man

$$\int_D y \cdot \rho\, d(x,y) = \int_{D_2} \rho \cdot y \cdot d(x,y)$$

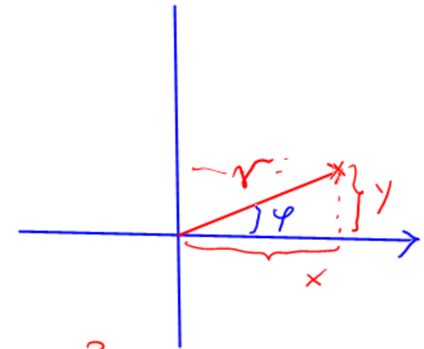
$$
\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \rho\cdot y\,dy\,dx \left(= \frac{2}{M}\int_{0}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \rho\cdot y\,dy\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\cancel{\rho}\cdot F}\int_{-1}^{1}\int_{-3}^{4-x^2} \cancel{\rho}\cdot y\,dy\,dx = \frac{1}{F}\int_{-1}^{1}\underbrace{\left[\int_{-3}^{4-x^2} 1\cdot y\,dy\right]}_{y^2/2} dx\\
&= \frac{1}{20}\int_{-1}^{1} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-3}^{4-x^2} dx = \frac{1}{40}\int_{-1}^{1} (4-x^2)^2-(-3)^2\,dx\\
&= \frac{1}{40}\int_{-1}^{1}\big((16-8x^2+x^4-9\big)\,dx\\
&= \frac{1}{40}\left(\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+7x\right]_{-1}^{1}\right)\\
&= \frac{1}{40}\left(\frac{1}{5}-\frac{8}{3}+\frac{35}{5}-\left(-\frac{1}{5}+\frac{8}{3}-\frac{35}{5}\right)\right) = \frac{68}{300}
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Zu berechnen sei das Intagral einer stetigen Funktion $f(x, y)$ über den

halben Kreisring $R :\ \overset{2^2}{4} \le x^2 + y^2 \le \overset{3^2}{9}, \qquad x \le 0.$

Berechnung in kartesischen Koordinaten umständlich!

In Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ gilt:



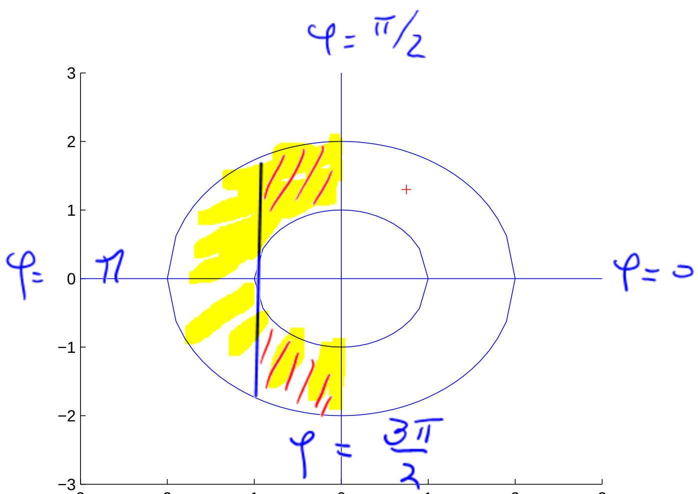
$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$R :$ $\quad 2 \le r \le 3 \qquad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$

Das Gebiet ist viel einfacher.

ABER: Koordinatenwechsel / Substitution nötig!



$$\int_R f(x,y)\, d(x,y) \neq \int_2^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \tilde{f}(r,\varphi)\, d\varphi\, dr$$

Transformationssatz:

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$ gilt

$x = \varphi(u)$ $\qquad \frac{dx}{du} = \varphi'(u)$

$dx = \varphi'(u)\, du$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u)) \cdot \phi'(u)du \qquad (\phi'(u) \neq 0\,, \quad \forall x \in]a,b[)$$

Unter den in der Vorlesung angegebenen Voraussetzungen an Φ und D und f gilt hier:

$$\int_{\Phi(D)} f(\boldsymbol{x})d(\boldsymbol{x}) = \int_D f(\Phi(\boldsymbol{u}))\cdot|detJ\Phi(\boldsymbol{u})|d\boldsymbol{u} \qquad (|detJ\Phi(\boldsymbol{u})| \neq 0\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in D^\circ)$$

Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

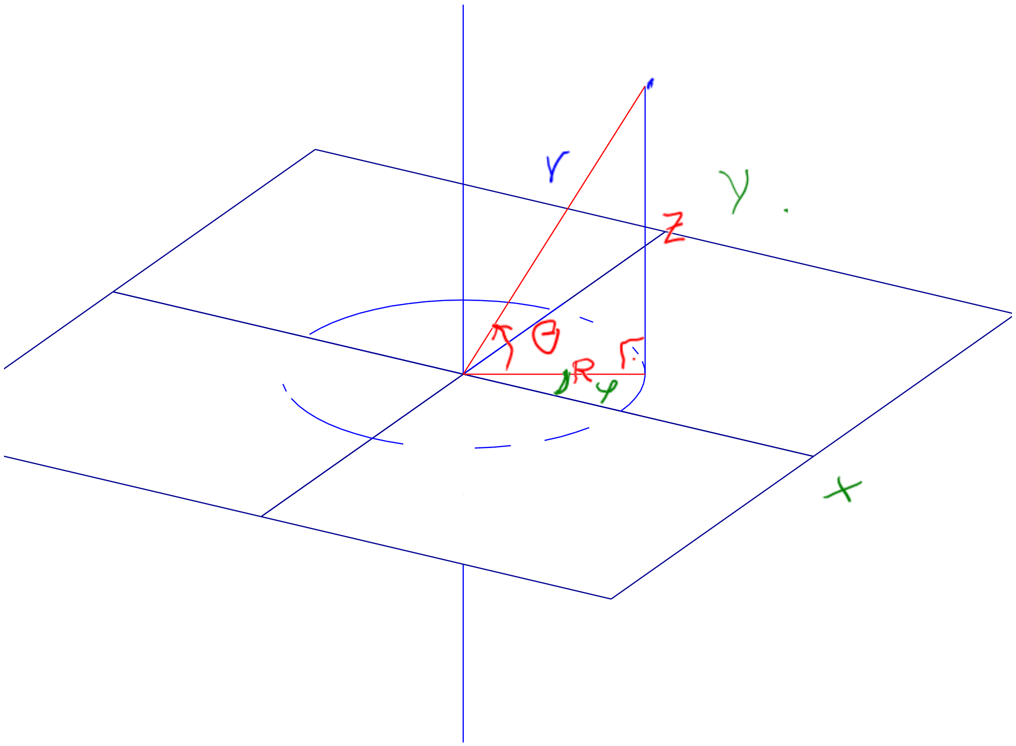
$$J\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$|det(J\Phi(r,\varphi))| = r$

$$\det(J\phi(r,\varphi)) = r\cos^2(\varphi) - (-r\sin^2(\varphi)) = r\underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{1} = r$$

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$|det(J\Phi(r,\varphi))| = r^2\cos(\theta).$



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$z = r\sin(\theta)$

$R = r\cos(\theta)$ einsetzen

$x = R\cos(\varphi)$

$y = R\sin(\varphi)$

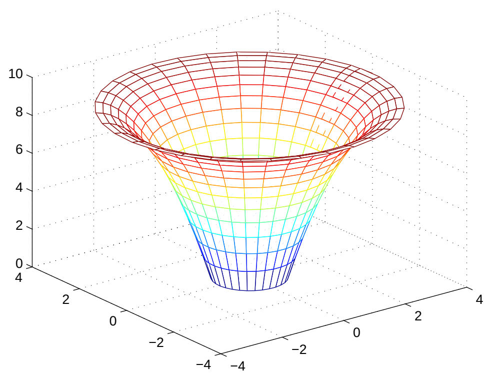
Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$\checkmark\ , z$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Im Beispiel 4: $1 \le \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} \le 16,\ 0 \le z \le 9 - (4 - \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2}})^2$



$1 \le r \le 4$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$9 - (4 - \sqrt{r^2})^2$

$0 \le z \le 9 - (4 - r)^2$

Kugelkoordinaten für u, v, w.

$\frac{x}{a} = u = r\cos(\varphi)\cos(\theta)$

$\frac{y}{b} = v = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$

$\frac{z}{c} = w = r\sin(\theta)$

Elliptische Kugelkoordinaten

Zum Beispiel bei $\Phi(D) = \left(\overset{u}{\frac{x}{a}}\right)^2 + \left(\overset{v}{\frac{y}{b}}\right)^2 + \left(\overset{w}{\frac{z}{c}}\right)^2 \leq 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ br\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ cr\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = abcr^2\cos(\theta)$$

Im Beispiel 7: Rotationsellipsoid

$$E = \{(x,y,z)^T : \underset{1}{x^2} + y^2 + z^2/4 \leq 1\}.$$

$a = b = 1$

$c = 2$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u) = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 2r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq r \leq 1$

$\det(J(\Phi) = 2r^2\cos(\theta)$

Elliptische Zylinderkoordinaten: analog

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \Phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$|det(J\Phi(r,\varphi))| = \begin{vmatrix} a\cos(\varphi) & -ra\sin(\varphi) & 0 \\ b\sin(\varphi) & rb\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{abr}}$$

Beispiel 6:

Gegeben ist ein Turms mit elliptischem Grundriss:

$0 \le u^2+v^2 \le 25$ $\qquad r^2 = u^2+v^2$

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ,\ \underbrace{0 \le \Big(\overset{u}{\frac{x}{4}}\Big)^2 + \Big(\overset{v}{\frac{y}{3}}\Big)^2 \le 25}, \quad 0 \le z \le 20 \right\}.$$

$\frac{x}{4} = u = r\cos(\varphi)$

$\frac{y}{3} = v = r\sin(\varphi)$

$0 \le r^2 = u^2+v^2 \le 25$

$0 \le r \le 5$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

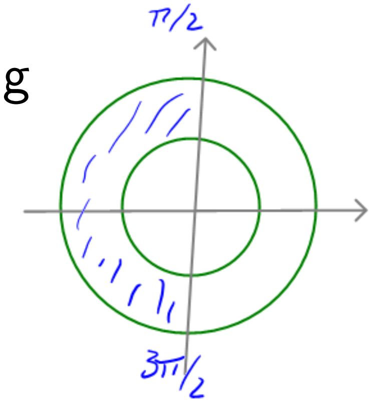
$x = 4r\cos(\varphi)$

$y = 3r\sin(\varphi)$

$z = z$

Nun zur Integration!

Im Beispiel 3 war $f(x,y)$ zu integrieren über den halben Kreisring



$$R:\ 4 \le \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} \le 9, \qquad x \le 0$$

In Polarkoordinaten:

$r \in [2,3] \qquad \phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$x = r\cos(\varphi)$

$y = \sin(\varphi)$

$x^2+y^2 = r^2$

Zum Beispiel für $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

$x^2+y^2 = r^2$

$$\int_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_R \frac{1}{x^2+y^2}\,d(x,y) = \int_2^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot r}_{1/r}\,d\phi\,dr$$

$$= \int \frac{1}{r}\,\underbrace{[\,\varphi\,]_{\pi/2}^{3\pi/2}}_{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi}\,dr$$

$$= \pi \int \frac{1}{r}\,dr = \pi(\ln(3) - \ln(2)).$$

Beispiel 4: Es sei $f(x,y) = z \cdot (x+y)^2$ zu integrieren über

$$D: 1 \leq \underbrace{x^2+y^2}_{} \leq 16,\ 0 \leq z \leq 9 - (4 - \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r})^2$$

$x^2+y^2 = r^2$
$1 \leq r \leq 4$
$x = r\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\varphi)$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq z \leq 9-(4-r)^2$

Zylinderkoordinaten:

$$\int_D z \cdot (x+y)^2\, d(x,y,z) = \int_1^4 \int_0^{9-(4-r)^2} \int_0^{2\pi} z\,(\overbrace{r\cos(\phi)}^{x}) + \overbrace{r\sin(\phi)}^{y})^2 \cdot r \cdot d\phi\, dz\, dr$$

$0 \leq z \leq 9-(4-r)^2$
erst dz dann dr

binomische Formel
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$= \int\int\int z\,(r^2\cos^2(\phi)) + 2r^2\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\sin^2(\phi)) \cdot r \cdot d\phi\, dz\, dr$$

$$= \int\int^{9-(4-r)^2}\int zr^3 \Big(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{1} + \underbrace{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\sin(2\varphi)} \Big)\, d\varphi\, dz\, dr$$

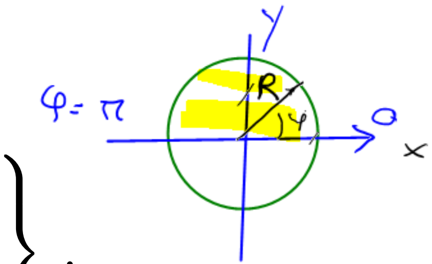
$$= \int_1^4\int_0 zr^3 \left[\varphi + \frac{\cos(2\varphi)}{-2}\right]_0^{2\pi} dz\,dr = \int_1^4 \left[\int_0^{9-(4-r)^2} \pi r^3 \cdot 2z\, dz\right] dr$$

$\underbrace{2\pi - 0 + \underbrace{(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})}_{\to 0}}$

$$= \pi \int_1^4 r^3\, \left[z^2\right]_0^{9-(4-r)^2} dr = \pi \int_1^4 r^3\,(9-(4-r)^2)^2\, dr = \ldots$$

Beispiel 5:

Gegeben der wie folgt beschriebene Teil D einer Kugelschale mit homogener Massendichte $\rho = 2$:



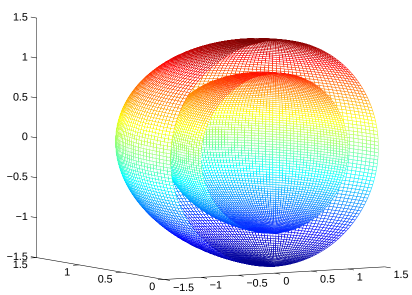
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \,,\, y \geq 0 \right\} .$$

$1 \leq r^2 \leq 2$

$1 \leq r \leq \sqrt{2}$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Zu berechnen: Das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse

Hinweis: $\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$

Lösung:)

Übergang zu Kugelkoordinaten:

$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$:

$y \geq 0$: $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\Phi : \begin{cases} r \in [1, \sqrt{2}] \quad , \phi \in [0, \pi] \quad , \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die Determinante der Transformation ist aus der Vorlesung bekannt:

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}, \ \det \boldsymbol{J}\Phi = r^2\cos\theta$$

$$\Theta_z = \int_D \rho \cdot (a_z(x,y,z))^2 \, d(x,y,z)$$

$2 \quad (x^2+y^2)$

$a_z(x,y,z) :=$ Abstand zur $z-$Achse $= \sqrt{x^2+y^2}$. siehe Seite 8

$$x^2+y^2 = \underbrace{r^2 \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)}_{x^2} + \underbrace{r^2 \sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)}_{y^2} = r^2\cos^2(\theta)$$

$$r^2\cos^2(\theta)\cdot\big(\underbrace{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}_{1}\big)$$

$$\Theta_z = \int_D \rho \cdot (a_z(x,y,z))^2 \, d(x,y,z)$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} 2r^2\cos^2(\theta) \cdot \underbrace{r^2\cos(\theta)}_{|\det J\phi|} \cdot 1 \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} r^4 \cos^3(\theta) 2 \, d\varphi \, d\theta \, dr = \int\int 2r^4\cos^3(\theta) \underbrace{[\varphi]_0^{\pi}}_{\pi} \, d\theta \, dr$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^4\cos^3(\theta) \cdot \pi \, d\theta \cdot dr$$

Also mit dem Tipp

$$\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$$

$$\Theta_z = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \left(\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\theta) + \cos(3\theta)) \right) d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \left[\frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{4} \frac{\sin(3\theta)}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dr$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \Bigg[\underbrace{\frac{3}{4} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \frac{1}{12} \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}}_{8/12} \underbrace{- \frac{3}{4} \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} - \frac{1}{12} \underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}_{1}}_{8/12} \Bigg] dr$$

$$= \frac{2 \cdot 4\pi}{3} \int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, dr = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{r^5}{5} = \frac{8\pi}{15} \left((\sqrt{2})^5 - 1 \right)$$

$$= \frac{8\pi}{15} (4\sqrt{2} - 1)$$

Alternative Rechnung/Schreibweise

$$\Theta_z = \Big(\int_1^{\sqrt{2}} r^4\,dr\Big) \cdot \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta)\,d\theta\Big) \cdot \Big(\int_0^{\pi} 2\,d\varphi\,\Big)$$

$$= \frac{2\pi}{5}(\sqrt{2}^5 - 1^5) \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3}{4}\cos(\theta) + \frac{1}{4}\cos(3\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2} - 1) \cdot \left[\frac{3}{4}\sin(\theta) + \frac{1}{12}\sin(3\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2} - 1) \cdot \left(\frac{3}{4}\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{12}\sin(\frac{3\pi}{2}) - \frac{3}{4}\sin(\frac{-\pi}{2}) + \frac{1}{12}\sin(-\frac{3\pi}{2})\right)$$

$$= \frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2} - 1) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2\pi}{5}\frac{8}{6}(4\sqrt{2} - 1) = \frac{8\pi}{15}(4\sqrt{2} - 1)\,.$$

Beispiel 6 :

Gegeben ist ein Behälter im Form eines Turms mit elliptischem Grundriss:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : , \; 0 \leq \underbrace{\left(\frac{x}{4}\right)}_{u}^2 + \underbrace{\left(\frac{y}{3}\right)}_{v}^2 \leq 25, \quad 0 \leq z \leq 20 \right\}.$$

$0 \leq u^2 + v^2 \leq 25$

$u = r\cos(\varphi) = \frac{x}{4}$

$v = r\sin(\varphi) = y/3$

Die Dichte eines Stoffes im Turm wird modelliert durch $\rho(x, y, z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

Zu berechnen: Masse des Stoffes im Turm.

Lösung: Koordinatentransformation

Elliptische Zylinderkoordinaten: $x = 4r\cos(\varphi)$, $y = 3r\sin(\varphi)$, $z = z$.

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatenransformation gilt

$$\det \boldsymbol{J} = \det \begin{pmatrix} 4\cos(\varphi) & -4r\sin(\varphi) & 0 \\ 3\sin(\varphi) & 3r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot r = 12r$$

$0 \leq r^2 \leq 25 \longrightarrow 0 \leq r \leq 5$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq z \leq 20$

Für die Parameter gilt: $r \in [0,5]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,20]$.

Für die Masse erhält man daher

$$M = \int_D \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$M = \int_0^5 \int_0^{20} \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} \rho(r,\varphi,z)\, 12r\, d\varphi\right]}\, dz\, dr =$$

$$[\;\;] = \int_0^{2\pi} 12r \frac{1}{1+z^2}\, d\varphi = \frac{12r}{1+z^2}\, \varphi\Big|_0^{2\pi} = 24\pi \frac{r}{1+z^2}$$

$$\underbrace{\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{2\pi - 0}$$

$$= 24\pi \int_0^{20} \underbrace{\left[\int_0^5 \frac{1}{1+z^2}\, r\, dr\right]} dz =$$

$$\frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{5^2 - 0^2}{2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

$$= 12\pi \cdot 25 \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2}\, dz$$

$$= 300\pi \int_0^{20} \frac{1}{1+z^2}\, dz = 300\pi \arctan(20).$$

Bei Bedarf vor Ort: Beispiel 7

Kugelkoordinaten für u, v, w

$x = u = r\cos(\varphi)\cos(\theta)$

$y = v = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$

$\frac{z}{2} = w = r\sin(\theta)$

$0 \le u^2+v^2+w^2 \le 1 \iff 0 \le r \le 1$

$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \{(x,y,z)^T : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2/4 \le 1}_{0 \le u^2 + v^2 + w^2 \le 1}\}.$$

Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\int_E \underbrace{(3z^2 - x^2 - y^2)}\, d(x,y,z)\,.$$

Elliptische Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 2r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$\det(J(\Phi)) =$ $2r^2\cos(\theta)$

wie im Beispiel 5

$x^2+y^2 = r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)$
$+ r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)$
$= r^2\cos^2(\theta)\,(\underbrace{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}_{1})$
$= r^2\cos^2(\theta)$

Zu integrieren $\underbrace{3z^2 - (x^2+y^2)}$

$3(2r\sin(\theta))^2 - r^2\cos^2(\theta)$

$= 12r^2\sin^2(\theta) - r^2\cos^2(\theta)$

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2(\theta)$ wie im Beispiel 5, Seite 24

$$\int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (12r^2\sin^2(\theta) - \underbrace{r^2\cos^2(\theta)}_{-r^2(1-\sin^2(\theta))}) \overbrace{(2r^2\cos(\theta))}^{\det J\phi} d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= \iint (13r^2\sin^2(\theta) - r^2)\, 2r^2\cos(\theta) \underbrace{\varphi \Big|_0^{2\pi}}_{2\pi} d\theta\, dr$$

$$I = 4\pi \int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \left(13\sin^2(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\right) d\theta\, dr^{*}$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4 \left(13\frac{\sin^3(\theta)}{3} - \sin(\theta)\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4 \left(\frac{13}{3} - 1 - \left(-\frac{13}{3} + 1\right)\right) dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4 \frac{20}{3} = \frac{80}{3}\pi \frac{r^5}{5}\Big|_0^1$$

$$= \frac{80}{3}\pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{16\pi}{3}$$

Ausführlicher

$u = \sin(\theta)$

$\frac{du}{d\theta} = \cos(\theta)$

$du = \cos(\theta)\, d\theta$

$(13\sin^2(\theta) - 1)\cos(\theta)\, d\theta$
$= (13u^2 - 1)\, du$

$$I = 4\pi \int_0^1 r^2 \int_{-1}^1 (13u^2 - 1)\, du\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^2 \left[13\frac{u^3}{3} - u\right]_{-1}^1 dr$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^2 \left[\frac{10}{3} - \left(-\frac{10}{3}\right)\right] dr$$