Dr. Hanna Peywand Kiani

# Hörsaalübung 5 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## **Infos/ Lehrmaterial** unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

## Extrema unter Nebenbedingungen, Newton Verfahren

D.h. nicht ganz $\mathbb{R}^n$ sondern vorgegebene Teilmengen

## Erlaubte Hilfsmittel

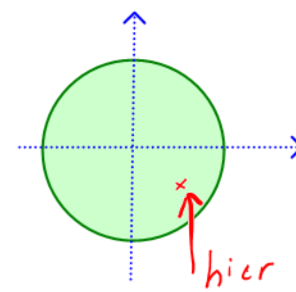
für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

Nur DGL I (Teile der LUM/BUW Studierenden): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

# Extrema unter Nebenbedingungen:

**Beispiel 1** Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Gesucht sind die Minima/Maxima von} \quad & f(x,y) = x + y \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$



hier müsste grad $f = (0,0)$ gelten

$\text{grad}\, f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (1,1) \neq (0,0)$

$\Longrightarrow$ keine Extrema im Inneren $\quad 4 - x^2 - y^2 > 0$

Zulässige Menge = Kreisscheibe ist kompakt, $f$ ist stetig.

$\Longrightarrow$ es gibt ein globales Minimum und ein globales Maximum.

muss auf Rand sein

Durch $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$ ist eine Höhenlinie von $g$ gegeben.

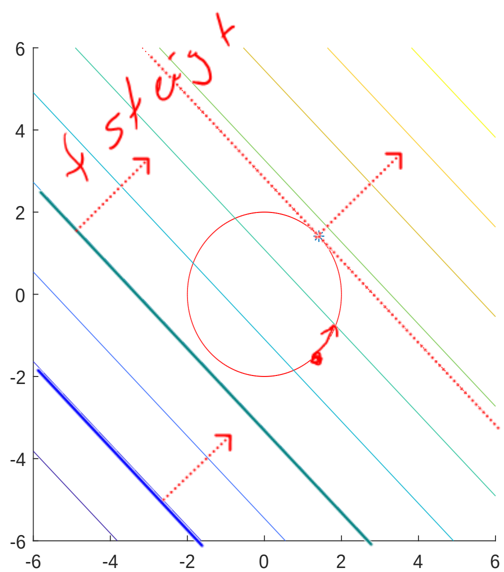
- **In jedem Punkt steht der Gradient senkrecht auf die Höhenlinie.**

- **Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs.**

Analoges gilt für die Höhenlinien/Gradienten von $f$.

$f(x, y) = x + y = c$

$y = c - x$




$f \approx -3{,}5$ $\quad f = \tilde{c} \approx 5$

Geratene notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y) = 0.}$$

$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit hätten wir das Gleichungssystem

$$f_x + \lambda g_x = 0, \qquad f_y + \lambda g_y = 0, \qquad g = 0$$

Zulässigkeit (Nebenbedingung)

oder mit $F(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$

Für zulässige Punkte die Bedingung $\boxed{\operatorname{grad} F(x,y) = \mathbf{0}}$

Mit $f(x,y) = x + y\,, \qquad g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 0\,.$

$\lambda = 0: \quad 1 + 0 = 0 \;$ ↯

$$\left.\begin{aligned} f_x + \lambda g_x = 1 + \lambda \cdot (-2x) &= 0 \implies \lambda \neq 0 \wedge x = \tfrac{1}{2\lambda}\,, \\ f_y + \lambda g_y = 1 + \lambda \cdot (-2y) &= 0 \implies \lambda \neq 0 \wedge y = \tfrac{1}{2\lambda}\,, \end{aligned}\right\} \; x = y$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0\,.$$

Setze die Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile ein:

$$4 - x^2 - x^2 = 0 \Longrightarrow 4 = 2x^2 \Longrightarrow x = y = \pm\sqrt{2}.$$

$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Wir erhalten also zwei Lösungen: $P_1 = \binom{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$, $P_2 = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Wenn die geratene Bedingung tatsächlich notwendig ist, sind die einzigen Kandidaten $P_1$ und $P_2$.

Zulässige Menge ist kompakt. Minimum und Maximum werden angenommen.

$f(P_1) = -2\sqrt{2}$, $\quad f(P_2) = 2\sqrt{2}$.

Einziges lokale Minimum (und damit das globale Minimum) auf der zulässigen Menge liegt in $P_1$.

Einzige lokale Maximum (und damit das globale Maximum) auf der zulässigen Menge liegt in $P_2$.

# Optimierung mit Gleichungsnebenbedingungen

hier $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ oder $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

**Problem:** $\boxed{f(\boldsymbol{x}) = \text{min/max} \; !}$ unter der(den) Nebenbedingung(en)

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{g(\boldsymbol{x}) = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &= 0 \\ h(\boldsymbol{x}) &= 0 \end{aligned}}$$

**Regularitätsbedingung (RB)**

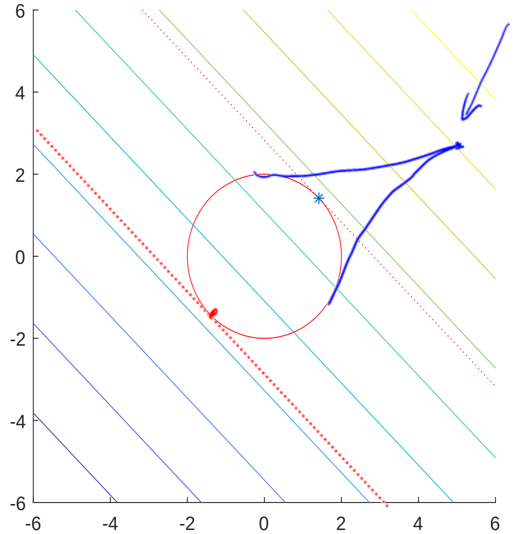
Jacobi-Matrix der Nebenbedingungen hat maximalen Rang: $\mathbb{R}^2$

Bei einer Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = 0$ heißt das $\operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$, : keine singulären Punkte

bei zwei Nebenbedingungen $g(\boldsymbol{x}) = 0,\ h(\boldsymbol{x}) = 0$ : Rang $\begin{pmatrix} \text{grad}\, g(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, h(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 2,$

jeweils für die zulässigen Punkte.

Dieses Extremum findet unser Verfahren nicht!




Spitze / Umkehrpunkt

$g_x = g_y = 0$

**Euler, Lagrange:** Definiere mit $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ die Lagrange Funktion

$$F := f + \lambda g \qquad bzw. \qquad F := f + \lambda g + \mu h$$

Satz

## Notwendige Bedingung für Min/Max von f unter g=(h=)=0

Wenn die **Regularitätsbdingung** erfüllt ist, ist jedes Extremum von f unter den Nebenbedingungen g=(h=)=0, ein zulässiger, stationärer Punkt der **Lagrange-Funktion** $F(x, y, z)$. D.h.

$$\boxed{\text{grad } F(x, y, z) = 0, \quad g = h = 0}$$

Bestimme also stationäre Punkte von $F$ d.h. Punkte mit $\text{grad}\, F = \mathbf{0}$,

für die zusätzlich : $g = 0$ bzw. $g = h = 0$ gilt!

$\longrightarrow$ Kandidaten Min/Max

Ausführlicher für $\mathbb{R}^3$: Notwendig für lokale Extrema bei Regularität

(Im Fall $\mathbb{R}^2$: Zeile 3 und 5 streichen und überall sonst $z$ streichen und $\mu = 0$ setzen.)

$F := f + \lambda g + \mu h$

$$\begin{aligned}
F_x &= f_x + \lambda\, g_x + \mu\, h_x = 0 \\
F_y &= f_y + \lambda\, g_y + \mu\, h_y = 0 \\
F_z &= f_z + \lambda\, g_z + \mu\, h_z = 0 \\
F_\lambda &= g(x,y,z) = 0 \\
F_\mu &= h(x,y,z) = 0
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ **Kandidaten**

**Klassifizierung:** (Min, Max oder Sattel)

**A) Zulässige Menge kompakt und $f$ stetig :** $\Longrightarrow$ Min/Max werden angenommen.

Kandidat mit höchstem Funktionswert $=$ globales Maximum.

Kandidat mit kleinstem Funktionswert $=$ globales Minimum.

**B) Bedingungen zweiter Ordnung :** (im Fall von 2 Nebenbedingungen)

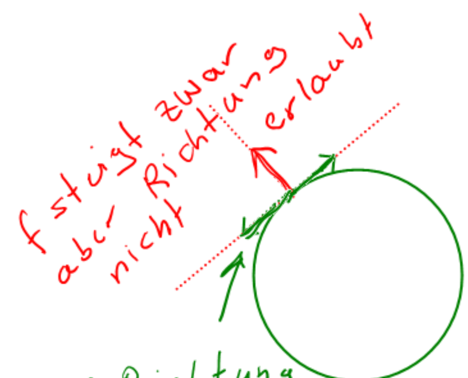
Sei $\boldsymbol{x}_0$ zulässig (d.h. $g(\boldsymbol{x}_0) = h(\boldsymbol{x}_0) = 0$),
die Regularitätsbedingung erfüllt in $\boldsymbol{x}_0$, und es gelte

$$\exists \lambda, \mu \quad \text{mit} \quad \operatorname{grad} F(\boldsymbol{x}_0) = 0$$

Definiere Tangentialraum:

$$TG(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{w} \ : < \boldsymbol{w}, \operatorname{grad} g(\boldsymbol{x}_0) \ > = 0 \ \text{ und } \ < \boldsymbol{w}, \operatorname{grad} h(\boldsymbol{x}_0) \ > = 0 \, \}$$

Dann ist




Richtung, in die man lokal gehen darf

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Minimum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \geq 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

und

$$\boxed{\textbf{hinreichend für lokales Minimum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} > 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

Analog

$$\boxed{\textbf{notwendig für lokales Maximum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} \leq 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

und

$$\boxed{\textbf{hinreichend für lokales Maximum: } \boldsymbol{w}^T \cdot HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{w} < 0,\ \forall \boldsymbol{w} \in TG(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}}$$

Das heißt insbesondere : die notwendigen Bedingungen aus dem unrestingierten Fall für Minima (Maxima), nämlich Hesse-Matrix positiv (negativ) semidefinit sind hier keine notwendigen Bedingungen mehr. Die Matrix kann z.B. auch bei einem Minimum negative Eigenwerte haben, sofern die zugehörigen Eigenvektoren keine zulässigen Richtungen sind, d.h. aus der zulässigen Menge raus führen.

**Beispiel 2:** [Alte Klausuraufgabe]

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = x - 8y + z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

Kompakt $\Rightarrow \exists$ globales Min / Max

$$g(x,y,z) = x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$$

und

$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

**Lösungsskizze:**

Regularitätsbedingung (RB): $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g \\ \operatorname{grad} h \end{pmatrix}$ hat Rang 2

$$J(g,h)(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2(y+4) & 2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

RB verletzt falls

1. Zeile $\quad \alpha\, 2x = 2x \Rightarrow (\alpha - 1)2x = 0$

$$\underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y+4) \\ 2z \end{pmatrix}}_{= (\mathrm{grad}(g))^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}_{= (\mathrm{grad}(h))^T} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{\alpha = 1} \vee x = 0 \\ \text{nicht erfüllbar für } \alpha = 1 \\ \cancel{\alpha = 1} \vee z = 0 \end{cases}$$

: $2y + 8 = 2y \iff 8 = 0$ ↯

3. Zeile $\quad \alpha \cdot 2z = 2z$

RB kann also nur für $x = z = 0$ verletzt sein.

Welche zulässigen Punkte mit $x = z = 0$ gibt es?

UND

$g(0, y, 0) = 0 + (y+4)^2 + 0 - 25 = 0 \Longrightarrow y = -4 \pm 5,$ $\quad y = -9$ oder $y = 1$

$(y+4)^2 = 25 \qquad (y+4) = \pm\sqrt{25} \qquad \rightarrow y = -4 \pm \sqrt{25}$

$h(0, y, 0) = 0 + y^2 + 0 - 9 = 0 \Longrightarrow y = \pm 3.$

$y \in \{-9, 1\}$ und $y \in \{-3, 3\}$ ↯ $\longrightarrow$ keine zulässigen Punkte mit $x = z = 0$

Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Mit $f(x, y, z) = x - 8y + z$ und der Lagrange Funktion $F = f + \lambda g + \mu h$ erhält man als notwendige Bedingungen für Extrema:

$f_x + \lambda g_x + \mu \cdot h_x$

1) $F_x = 0$ : $1 + \lambda 2x + \mu \cdot 2x = 0$

2) $F_y = 0$ : $-8 + \lambda \cdot 2(y+4) + \mu 2y = 0$

3) $F_z = 0$ : $1 + \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 2z = 0$

ähnlich

4) $g = 0$ : $\quad x^2 + (y+4)^2 + z^2 - 25 = 0$ ,

5) $h = 0$ : $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ .

ähnlich

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

(4) - (5)

$$\underbrace{(y+4)^2}_{y^2 + 8y + 16} - y^2 = 16 \iff 8y + \cancel{16} = \cancel{16} \iff \boxed{y = 0\,.}$$

$y^2 + 8y + 16 - y^2 = 16$

wo nützlich? $\to$ in (2)

$-8 + 2\lambda \cdot 4 + 0 = 0$

$-8 + 8\lambda = 0$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $\boxed{\lambda = 1}$ und damit

(1): mit $\lambda = 1$
I) $1 + 2x + 2\mu x = 0$ ,

(3) II) $1 + 2z + 2\mu z = 0$ ,

(4) = (5), $y = 0$ III) $x^2 + z^2 - 9 = 0$ ,

(2) ✓ $\lambda = 1$ , $\quad y = 0$ .

I - II : $(1 + 2x + 2\mu x) - (1 + 2z + 2\mu z) = 2x - 2z + 2\mu x - 2\mu z = 0$

$\iff 2(x-z) + 2\mu(x-\mu) = (2+2\mu)(x-z) = 0$

$\implies \mu = -1 \quad$ oder $\quad x = z$

$2(1+\mu)(x-z) = 0 \iff \mu = -1$ oder $x = z$ .

$\mu = -1$ : I) $1 + 2x - 2x = 1 \overset{!}{=} 0$ ↯ Also $\boxed{x = z}$

$x = z$ : III) $x^2 + x^2 = 9 \longrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \longrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = z \qquad y = 0$

Kandidaten und Funktionswerte für $f(x, y, z) = x - 8y + z$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad f(P_1) = 3\sqrt{2}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad f(P_2) = -3\sqrt{2}.$$

Da der Schnitt der beiden Kugeloberflächen (leer, Punkt oder Kreisrand) eine kompakte Menge ist werden Minimum und Maximum der stetigen Funktion $f$ angenommen. Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass in $P_1$ das globale Maximum und in $P_2$ das globale Minimum liegt.

**Beispiel 3)** Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{min!}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 = 0.$$

a) Überprüfen Sie die Regularitätsbedingung.

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator $\lambda$ ein zulässiger, stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion $F$ ist.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(1, -1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $H_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum ker $\mathrm{D}g(\boldsymbol{x}_0) = TG_g(\boldsymbol{x}_0)$.

**Lösungsskizze:**

Teil a): $g(x,y) = e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1$ $\qquad \frac{d}{dz}\arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{J}g(x,y) = \operatorname{grad} g(x,y) = (\underbrace{e^{x-1}}_{g_x}, \underbrace{-\frac{1}{1+(1+y)^2}}_{g_y}) \neq (0,0) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow$ grad $g(x,y)$ hat Rang 1 (Regularitätsbedingung). ✓

Zulässigkeit: $g(1,-1) = \underbrace{e^{1-1}}_{1} - \underbrace{\arctan(\underbrace{-1+1}_{0})}_{0} - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$ ✓

Lagrange-Funktion: $F = f + \lambda \cdot g = \underbrace{x^2 + y^2}_{f} + \lambda \underbrace{\left(e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1\right)}_{g}$.

stationärer Punkt der Lagrange–Funktion bedeutet: grad $F(1,-1) = (0,0)$.

Zu zeigen: $\exists \lambda$ mit grad $F(1,-1) = (0,0)$

$F_x = f_x + \lambda g_x$

$F_y = f_y + \lambda g_y$

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \left(2x + \lambda e^{x-1},\ 2y + \lambda\left(-\frac{1}{1+(1+y)^2}\right)\right) \quad \operatorname{grad} F(1,-1) = \left(2 + \lambda e^{1-1},\ -2 - \lambda\left(\frac{1}{1+(\underbrace{1-1}_{0})}\right)\right)$$

$$\operatorname{grad} F(1,-1) = (2 + \lambda e^0,\ -2 - \lambda) \stackrel{!}{=} (0,\ 0) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2+\lambda = 0 \\ -2-\lambda = 0 \end{array}\right\}$$ beide erfüllt mit $\boxed{\lambda = -2}$

Teil b): $\text{grad}_{x,y}\, F(x,y) = (F_x, F_y) = (2x + \lambda e^{x-1}, 2y - \lambda \frac{1}{1+(1+y)^2})$

$$\boldsymbol{H}_{x,y}F = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda e^{x-1} & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \frac{-2(1+y)}{(1+(1+y)^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{1-1} & 0 \\ 0 & 2-(-2)\frac{-2(1-1)}{(1+(1-1)^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda = -2$

d.h. $\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1)$ ist semidefinit $(\det \boldsymbol{H}_{x,y}F(1,-1) = 0)$.

**Untersuchung auf dem Tangentialraum:**

$$\text{Ker}Dg(\boldsymbol{x}_0) = TG(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \ : \ \text{grad}\ g(\boldsymbol{x}_0)\cdot \boldsymbol{w} \overset{!}{=} 0\}$$

$\text{grad}\, g(x,y) = (e^{x-1}, -\frac{1}{1+(1+y)^2})$

$$\text{grad}\ g(1,-1) = (e^0, -\frac{1}{1+0^2}) = (1,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1 - w_2 \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow w_1 = w_2$$

$\boldsymbol{w} = \binom{w_1}{w_2}$ mit $\operatorname{grad} g(1,-1)\binom{w_1}{w_2} = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

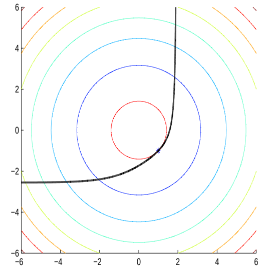
$$\text{Ker} Dg(\boldsymbol{x}_0) = TG(\boldsymbol{x}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

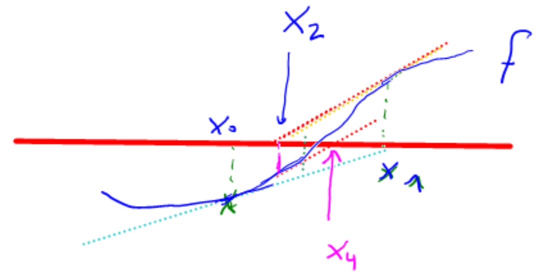
Für alle $\boldsymbol{w} \neq 0$ aus dem Tangentialraum gilt mit einem $\alpha \neq 0$:

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1)\, \boldsymbol{w} = \alpha \cdot (1,1) \boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1) \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha^2 \cdot (1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (1,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\alpha^2 > 0\,.$$

d.h. die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}_{x,y} F(1,-1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,-1)$ ein strenges lokales Minimum vor.




**Idee des Newtonverfahrens:**

Ziel: $f(x) \overset{!}{=} 0$

Idee: $f(x) \approx T_1(x; x_k) \; = \; f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ (Nahe $x_k$)

Löse Ersatzproblem: $f(x_k) + f'(x_k)\underbrace{(x - x_k)}_{\Delta_k} \overset{!}{=} 0 \iff f'(x_k)\Delta_k \overset{!}{=} -f(x_k)$

Definiere $x_{k+1} = x_k + \Delta_k$.

linear

Iteriere!

Geometrisch:

# Newton-verfahren:

Gesucht Lösung des System

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \underline{D \subset \mathbb{R}^n}, \ \underline{f : D \to \mathbb{R}^n}$$

Berechne stattdessen Nullstelle der Linearisierung im Punkt $\boldsymbol{x}^{[k]}$

ersetzt $f'(x)$

$$T_1(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^{[k]}) = \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{[k]}) = 0} \Longrightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})\underbrace{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{[k]})}_{\Delta^{[k]}} \overset{!}{=} -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

lineares Gleichungssystem

Nehme dieses $\boldsymbol{x}$ als neue Näherung und iteriere. Startwert $x^{[0]}$ vorgeben. Dann:

- Berechne $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Berechne die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \cdot \Delta^{[k]} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$
- Setze $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \Delta^{[k]}$.

**Beispiel:**

Zur Bestimmung des Minimums der Funktion

$$z \; = \; F(x,y) \; := \; x^2 + 2y^2 - 0.1\cos(x+y) - 3x + 2y$$

$\operatorname{grad} F(x,y) = \left( 2x + 0{,}1 \sin(x+y) - 3 \; , \; 4y + 0.1 \sin(x+y) + 2 \right) = f(x,y)$

soll das Newton–Verfahren auf die Funktion $f(x,y) \; := \; \underline{\nabla F(x,y)}^T$ angewendet werden.

a) Berechnen Sie $f(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $Jf(x,y)$.

b) Stellen Sie das Newton–Verfahren auf und führen Sie den ersten Iterationsschritt per Handrechnung durch; Startvektor: $(x^0, y^0) = (0,0)$.

c) Führen Sie die Iteration numerisch durch und berechnen Sie damit die Lösung auf (wenigstens) zehnstellige Genauigkeit.

**Lösung:**

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (\underbrace{2x + 0.1\sin(x+y) - 3}_{f_1(x,y)},\ \underbrace{4y + 0.1\sin(x+y) + 2}_{f_2(x,y)})^T \overset{!}{=} (0,\ 0)^T$$

$$f(0,0) = (-3,\ 2)^T$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \overset{(f_1)_x}{2 + 0.1 * \cos(x+y)} & \overset{(f_1)_y}{0.1 * \cos(x+y)} \\ \underset{(f_2)_x}{0.1 * \cos(x+y)} & \underset{(f_2)_y}{4 + 0.1 * \cos(x+y)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2.1 & 0.1 \\ 0.1 & 4.1 \end{pmatrix} \qquad \cos(0+0) = 1$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(0,0) \cdot \Delta^{[0]} = -\boldsymbol{f}(0,0) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2.1 & 0.1 \\ 0.1 & 4.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1^{[0]} \\ \Delta_2^{[0]} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{lineares System}} \quad \text{lösen} \longrightarrow \Delta^{[0]}$$

$$\boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{[0]} + \Delta^{[0]}.$$

weiter mit $\partial f(x^{[1]})\,\Delta^{[1]} \overset{!}{=} -f(x^{[1]})$

Matlab für Anfänger (das geht natürlich deutlich eleganter!)

```
format long
k=0
x= 0 %Startwert
y= 0  %Startwert
for j=1:5, %Anzahl Newton-Schritte
c= 0.1 * cos(x+y);
s = 0.1 * sin(x+y);
A=[2+c c; c 4+c]  %Jakobi-Matrix
b=[-2*x-s+3;-4*y-s-2] %Funktion dessen Nullstelle gesucht ist
%Newton-Iteration
dx = A \b ; %Gleichungssystem lösen
k=k+1
x= x+dx(1,1)
y=y+dx(2,1)
end
%Gradient von ursprünglicher Funktion
g= b
```

$$
\begin{array}{llll}
k=0 & x & =0 & y=0 \\
k=1 & x & =1.45348837209302 & y=-0.52325581395349 \\
k=2 & x & =1.45963647269063 & y=-0.52018176365468 \\
k=3 & x & =1.45963810885761 & y=-0.52018094557119 \\
k=4 & x & =1.45963810885773 & y=-0.52018094557114 \\
k=5 & x & =1.45963810885773 & y=-0.52018094557114
\end{array}
$$

Gradient von $F$ im Punkt $x^{[5]}$:

$f$ $$g = 10^{-15} * (-0.444089209850063, -0.222044604925031)$$

Da die Hesse–Matrix von $F$ (also die Jacobi-Matrix von $f$) positiv definit ist, handelt es sich tatsächlich um eine Näherung für ein Minimum.

$$HF = \partial f = \begin{pmatrix} 2 + 0.1\cos(\cdots) & 0.1\cos(\cdots) \\ 0.1\cos(\cdots) & 4 + 0.1\cos(\cdots) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (HF)_{11} = 2 + 0.1\cos(\cdots) \geq 1.9 > 0 \\ \det Hf \geq (1.9)(3.9) - (0.1)^2 > 0 \end{array}\right\} Hf \text{ positiv definit}$$