Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 24/25

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Extrema,
Satz über implizite Funtionen,
Ebene Kurven

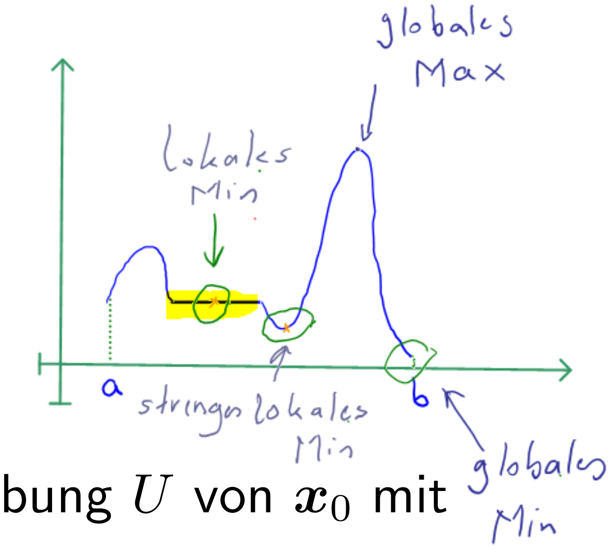
,

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

Nur DGL I (Teile der LUM/BUW Studierenden): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Extrema ohne Nebenbedingungen:



Extrema : Sammelbegriff für Minima und Maxima

$$D \subset \mathbb{R}^n,\ f : D \to \mathbb{R}$$

Lokales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$: es gibt Umgebung U von $\boldsymbol{x}_0$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in U$$

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in U$$

Globales Minimum bzw. Maximum in $\boldsymbol{x}_0$:

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$$

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$$

Existenz von globalem Minimum und Maximum gesichert, falls D kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und f stetig!

Striktes/strenges Maximum/Minimum, wenn oben $\leq$ bzw. $\geq$ durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2-$ Funktion, dann ist eine

NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMA IN D°

$$\boxed{\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) = 0}$$

Innere Punkte

Im $\mathbb{R}^1$: $f'(x_0) = 0$.

Wird sofort klar mit:

grad $f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \boldsymbol{v}$ mit $\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v} > 0$

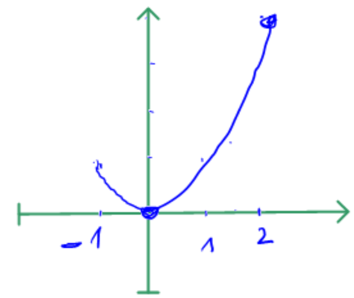
$\boldsymbol{v}$ ist Aufstiegsrichtung! Kein Max in $\boldsymbol{x}_0$

$\text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (-\boldsymbol{v}) < 0$

$-\boldsymbol{v}$ ist Abstiegsrichtung! Kein Min in $\boldsymbol{x}_0$

Achtung: Randpunkte gesondert betrachten! (wie im $\mathbb{R}^1$)

Beispiel:



$$f(x) = x^2,\ D = [-1,\, 2],\ f'(x) = 0 \implies x = 0$$

$2x \overset{!}{=} 0$

Minimum in Null. Intervall kompakt. Wo bleibt das Maximum?

Am Rand in $x = 2$

Analoges gilt im Fall $D \subset \mathbb{R}^n$; $n > 1$.

stationäre Punkte: Punkte mit grad $f(x_0) = 0$

Im eindimensionalen:

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$: Maximum, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$: Minimum

Im mehrdimensionalen:

Typ des stationären Punktes (Maximum/Minimum/ Sattelpunkt): abhängig von den Vorzeichen der Eigenwerte der Hessematrix $Hf(x_0, y_0)$

Denn im stationären Punkt gilt $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und

$$f(\boldsymbol{x}_0 \pm h\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \; < \underbrace{\text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), h\boldsymbol{v}}_{=0 \text{ im stationären Punkt}} > + \frac{1}{2} \underbrace{h\, \boldsymbol{v}^T H f(\boldsymbol{x}_0 \pm \theta h \boldsymbol{v}) h\boldsymbol{v}}_{\substack{>0 \text{ wenn } Hf \text{ pos.def} \\ <0 \text{ '' '' neg.def}}}$$

Klassifikation:

EW'e von $H f(\boldsymbol{x}_0)$	Typ
Alle EW'e > 0	Minimum
Alle EW'e < 0	Maximum
Alle EW'e ≥ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Minimum oder Sattel
Alle EW'e ≤ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Maximum oder Sattel
$\exists \lambda_j < 0 \wedge \exists \lambda_k > 0$	Sattelpunkt
Alle EW'e $= 0$	keine Klassifikation mit dieser Methode möglich

Beispiel 1)

$f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = 7,$$

$$f(x,y) = (x,y) \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}^{A} \binom{x}{y} + \overbrace{(-2,3)}^{b^T} \binom{x}{y} + 7 \quad \xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}}$$

$$\longmapsto \quad f(x,y) := x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{grad } f(x,y) = (2x + y - 2,\ 2y + x + 3) \overset{!}{=} (0, 0)$$

$$\text{grad } f(x,y) = \underset{(0,0)}{\vec{0}} \iff \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases} \underset{\text{Gleichungssystem}}{\overset{\text{lineares}}{\iff}} \quad y = 2 - 2x$$

$$4 - 4x + x + 3 = 0$$

$$x = 7/3 \qquad y = -\frac{8}{3}$$

Kandidat(~~en~~) für ein Extremum (Ext~~r~~ema):

$$P = \begin{pmatrix} 7/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \det\ Hf(P) = 4 - 1 > 0 \\ \\ Hf_{11}(P) = 2 > 0 \end{cases}$$

$Hf(P)$ ist positiv definit

$\Longrightarrow$ Minimum

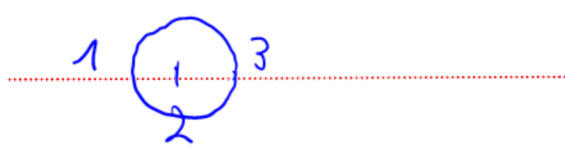
Alternativ: Eigenwerte

$$\det\left(Hf(x_0, y_0) - \lambda E\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = 1 \qquad 2 - \lambda = \pm 1$$

$$\lambda = 2 \mp 1 > 0$$

Alternativ: Gerschgorin



$\Longrightarrow$ Minimum in $\begin{pmatrix} 7/3 \\ -8/3 \end{pmatrix}$

Beispiel 2) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = y^2\,x^3 \;-\; 3y^2\,x \;+\; 12y\,.$$

Lösung:

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 3y^2 = 0 \iff$$

$3y^2\,(x^2-1) = 0 \implies y = 0$

oder $x^2-1=0 \implies x = \pm 1$

zu erfüllen ist noch II Setze dort ein $y=0$

$y=0 \quad f_y(x,0) = 12 \neq 0$

Setze ± 1 ein

II $$f_y(x,y) = 2yx^3 - 6xy + 12 \overset{!}{=} 0$$

$x=1 \quad f_y(1,y) = 2y - 6y + 12 \overset{!}{=} 0 \implies y = 3$

$x=-1 \quad f_y(-1,y) = -2y + 6y + 12 = 0 \implies y = -3$

Zur Klassifikation bestimme Hessematrizen in den stationären Punkten P_1, P_2

$P_1 = \binom{1}{3} \quad P_2 = \binom{-1}{-3}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} Hf_{xx}(x,y) & Hf_{xy}(x,y) \\ Hf_{yx}(x,y) & Hf_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6yx^2 - 6y \\ 6yx^2 - 6y & 2x^3 - 6x \end{pmatrix}$$

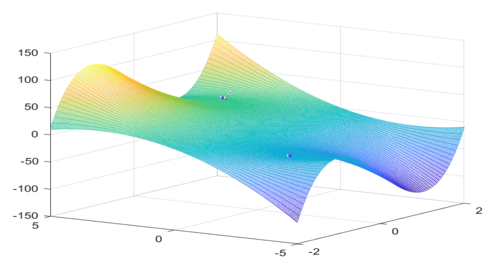
$$Hf(1,3) = \begin{pmatrix} 6\cdot 1\cdot 3^2 & 6\cdot 3\cdot 1^2 - 6\cdot 3 \\ 6\cdot 3 - 6\cdot 3 & 2\cdot 1^3 - 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 54, \; \lambda_2 = -4$$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$$Hf(-1,-3) = \begin{pmatrix} -54 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 = -54, \; \tilde{\lambda}_2 = 4$$

$\Rightarrow$ auch Sattelpunkt



Satz über implizite Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $\boxed{m < n}$ $\boldsymbol{g}$ sei C^k Funktion, $k \geq 1$.

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Gesucht : Lösungen von $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$

m Gleichungen, n Unbekannte. Mehr Variablen als Gleichungen.

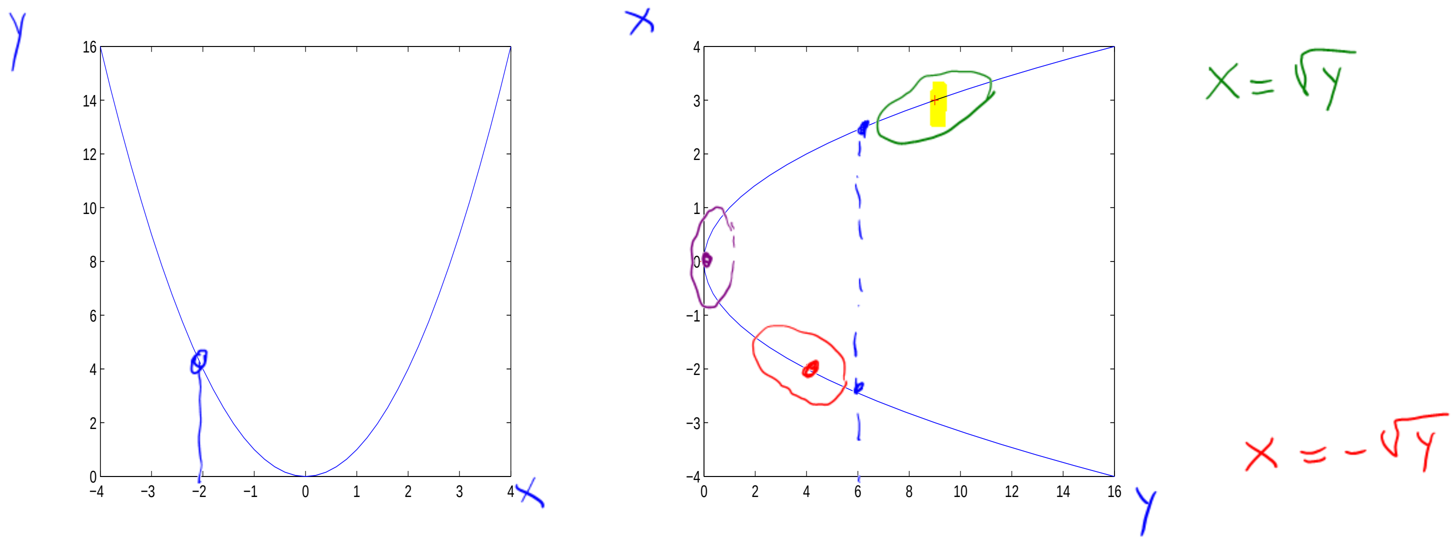
Frage: kann man die eine oder andere Variable eliminieren? Wenn ja, welche?

Einfaches Beispiel 3: $\boxed{g(x,y) = x^2 - y = 0} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$y = h(x) \quad = x^2$

Eindeutige Auflösung nach x global nicht möglich.

Was passiert lokal? Also in einzelnen Punkten.



$(x_0, y_0)^T := (3, 9)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = f(y) := \sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (-2, 4)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
$x = f(y) := -\sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (0, 0)^T$: In der Nähe dieses Punktes ist
keine eindeutige Auflösbarkeit gegeben! Hier ist $g_x = 2x|_{x=0}$

In der Nähe von $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ gilt $\underline{x = -\sqrt{y} = f(y)} \iff g(x,y) = 0$

Klassisch gerechnet:

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = \left(-y^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\, y^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Im folgenden Satz

$$\boldsymbol{J} f(y) = \ ?$$

$$\boldsymbol{J} f(y) = f'(y) = -\ \underbrace{(\boldsymbol{J} g_x(x,y))}_{2x}{}^{-1} \cdot \underbrace{\boldsymbol{J} g_y(x,y)}_{-1}$$

Für $g(x,y) = x^2 - y$ also

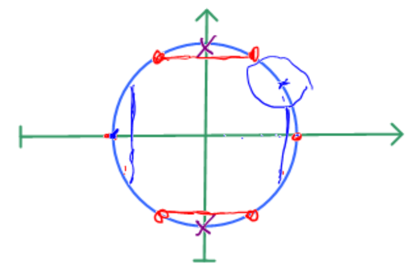
$$\boldsymbol{J} f(y) = f'(y) = -\frac{1}{2x}(-1) = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Beispiel 4: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5 um Null.

$x^2 = 25 - y^2$ $\quad x = \pm\sqrt{25-y^2}$

analog $\quad y = \pm\sqrt{25-x^2}$

Global kann man keine Variable eliminieren.



In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$ oder auch $y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$

nach beiden Variablen eindeutig auflösbar

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt

$y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$
Eine Auflösung nach x ist nicht möglich. Hier ist wieder $g_x = 2x = 0$.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$
Eine Auflösung nach y ist nicht möglich. Hier ist $g_y = 2y = 0$.

Auskunft über den allgemeinen Fall gibt der

SATZ: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $\boldsymbol{g}$ sei C^k Funktion, $k \geq 1$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

↑ sollen ellimi werden

Sei $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}_0 \end{pmatrix} \in D$ mit $\underbrace{g(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = 0}$ und

D.h. $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)^T$ löst das Gleichungssystem

$$J\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{y}} := \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{y}_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \boldsymbol{y}_m} \end{pmatrix} \quad \text{regulär im Punkt } (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0).$$

$\Longrightarrow$ $\exists$ lokal genau ein $\boldsymbol{f}$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$, $\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

g ist nach den Variablen y auflösbar!

$\boldsymbol{f}$ ist C^k–Funktion mit $\quad J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\left(J\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right)^{-1} \cdot J\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Beispiel 5: Gegeben sei $\quad g(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0.$

Ist $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (1,1)^T$ nach y auflösbar?

Das heißt: gibt es eine Funktion $f(x)$ mit $f(1) = 1$, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,.$$

Antwort: Ja, denn es gilt

$$g_y(x,y) = 4x^2 + 24x^4y^2 \quad \Longrightarrow \quad g_y(1,1) = 4 + 24 \neq 0\,.$$

Hier allerdings keine explizite Formel wie in den Eingangsbeispielen!

Man kann aber lokal die Funktion f durch Taylor-Polynome nähern.

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = y(1) + y'(1)(x-1)$$

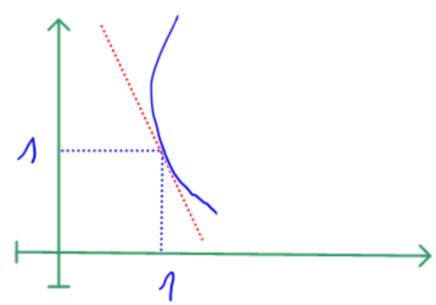
$= x_0$

1

$y = f(x)$

$1 = f(1)$

$y_0 = f(x_0)$



Wir brauchen $y'(1)$ für T_1 und für das Taylor-Polynom zweiten Grades

auch noch $f''(1)$ bzw, $y''(1)$

Implizites Differenzieren

Der Satz besagt $f'(x) = -1 \cdot \frac{g_x}{g_y}$

konstant $\Rightarrow$ Ableitung $= 0$

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} g(x, y(x)) = g_x \cdot x' + g_y \cdot y'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f'(x) = y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}}$$

das ist die Aussage aus dem Satz

In $(x_0, y_0)^T := (1,1)^T$ gilt also mit $g(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12$

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{8xy + 32x^3y^3}{4x^2 + 24x^4y^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)} = -\frac{8+32}{4+24} = -\frac{10}{7}$$

Das Taylorpolynom ersten Grades für g mit Entwicklungspunkt $x = 1$ ist also

$$T_1(x) = \underbrace{f(1)}_{1} + \underbrace{f'(1)}_{-\frac{10}{7}}(x-1) = 1 - \frac{10}{7}(x-1)$$

$x_0 = 1$

Alternative Berechnung von $f'(1)$:

konstant $\Longrightarrow$ Ableitung $= 0$

$$\boxed{g(x,y(x)) = 4x^2 y(x) + 8x^4 (y(x))^3 - 12 = 0} \Longrightarrow \frac{dg}{dx}(x,y(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx} g(x,y(x)) = 8xy(x) + 4x^2 y'(x)$$

$$+ 32x^3 (y(x))^3 + 8x^4 \cdot 3(y(x))^2 \cdot y'(x) = 0$$

$$= \boxed{\underbrace{(8xy(x) + 32x^3(y(x))^3)}_{A} + \underbrace{(4x^2 + 24x^4 \cdot (y(x))^2)}_{B} y'(x) = 0 \quad (*)}$$

$$\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y'(x) = -\frac{8xy + 32x^3y^3}{4x^2 + 24x^4y^2} = -\frac{8y + 32x^2y^3}{4x + 24x^3y^2}$$

A

B

Durch Einsetzen von $x = y = 1$ erhält man $y'(1) = -\dfrac{8+32}{4+24} = -\dfrac{10}{7}$.

Das hatten wir auch schon oben!

Für T_2 bräuchte man $f''(1)$: erneut (*) implizit differenzieren!

konstant

$$\boxed{\frac{d}{dx}g(x,y(x)) = 8xy(x) + 32x^3(y(x))^3 + \left(4x^2 + 24x^4\cdot(y(x))^2\right)\cdot y'(x) = 0}$$

$2yy'$

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x,y(x)) = 8y + 8xy' + 96x^2y^3 + 32x^3\cdot 3y^2\cdot y'$$

in $(1,1)$: $8 + 8\cdot 1\cdot(-\frac{10}{7}) + 96\cdot 1^2\cdot 1^3 + 32\cdot 1^3\cdot 3\cdot 1^2\cdot\frac{-10}{7}$

$$+ \left(8x + 96x^3\cdot y^2 + 48x^4y\cdot y'\right)\cdot y'$$

$\dots$

$$+ \left(4x^2 + 24x^4\cdot y^2\right)y'' = 0 \qquad (**)$$

Durch Einsetzen von $x = y(1) = 1$ und $y' = -\frac{10}{7}$ erhält man

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}g(x,y(x))\right|_{(1,y(1))} = 8 + 8(-\frac{10}{7}) + 96 + 96(-\frac{10}{7})$$

$$+ \left(8 + 96 + 48(-\frac{10}{7})\right)(-\frac{10}{7}) + (4+24)y''(1) = 0$$

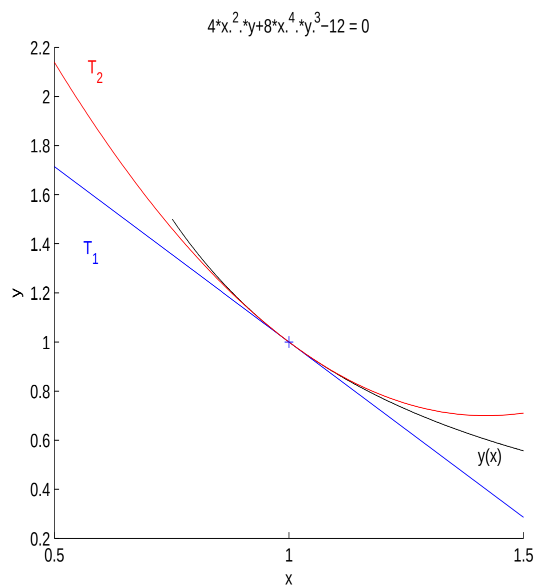
$$104\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(104 - \frac{480}{7}\right)\left(-\frac{10}{7}\right) = -28y''(1)$$

$$\Longrightarrow \quad y''(1) = -3.3994...$$

Als Taylor-Polynom zweiten Grades ergibt sich für unser Beispiel

$f(x_0) = y(x_0)$ $\qquad x_0$

$$T_2(x;1) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2 = 1 - \frac{10}{7}(x-1) - \frac{3.3994\cdots}{2}(x-1)^2\,.$$



Beispiel 6: Durch die einzelne Gleichung

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, eine Gleichung

$\rightarrow$ Eine Variable ellimினieren

$$g(x, y, z) = xy\sin(z) - (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

ist **implizit** eine **Fläche** definiert.

Offensichtlich: $g(1, 1, 0) = 0$

$$g_x(x, y, z) = y\sin(z) - 2(x-1) \qquad g_y(x, y, z) = x\sin(z) + 2(y-1)$$

$$g_z(x, y, z) = xy\cos(z)$$

$g_x(1, 1, 0) = \sin(0) - 2(1-1) = 0$ $\quad g_y(1, 1, 0) = 0 + 2(1-1) = 0$ $\quad g_z(1, 1, 0) = 1 \cdot \cos(0) = 1 \neq 0$

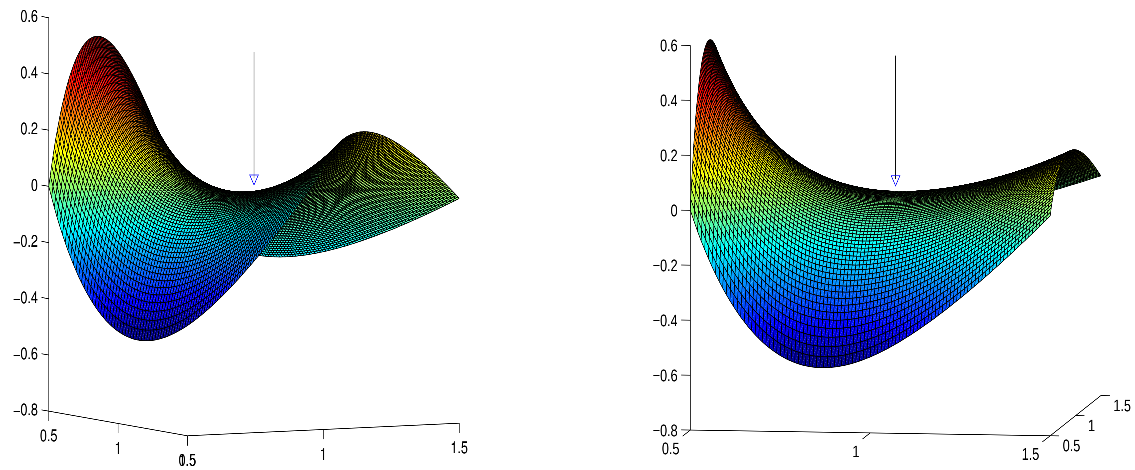
nach dem Satz kann im Lösungspunkt $(1, 1, 0)$ nach z aufgelöst werden.

$g_x(1, 1, 0) = g_y(1, 1, , 0) = 0$: Der Satz garantiert also keine Auflösbarkeit nach x oder y. Er schließt aber auch nichts aus! Warum?

$g(x, y, z) = 0 \iff g(x, y, z(x, y)) = 0$

$z = f(x, y)$

Bei expliziter Auflösbarkeit nach z erhält man eine **explizite** Darstellung der Fläche: $(x, y, z(x, y))$



hier tatsächlich

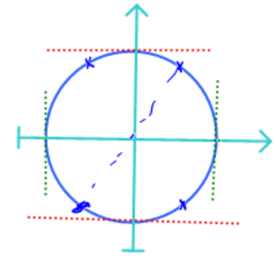
$$x\,y\,\sin(z) = (x-1)^2 - (y-1)^2$$

$$\sin(z) = \frac{(x-1)^2 - (y-1)^2}{xy}$$

$$z = \arcsin\left(\frac{(x-1)^2 - (y-1)^2}{xy}\right)$$

Ebene Kurven, singuläre Punkte

Spezialfall
$n=2 \quad m=1$
im Satz



Beispiel 7: Der Kreis $g(x,y) := x^2 + y^2 - 25 = 0$ hat

horizontale Tangenten für $g_x = 2x = 0$,

vertikale Tangenten für $g_y = 2y = 0$,

Symmetrie:

zur $x-$Achse : $g(x,y) = g(x,-y)$

$g(x,-y) = x^2 + (-y)^2 - 25$
$= x^2 + y^2 - 25 = g(x,y)$

zur $y-$Achse : $g(x,y) = g(-x,y)$

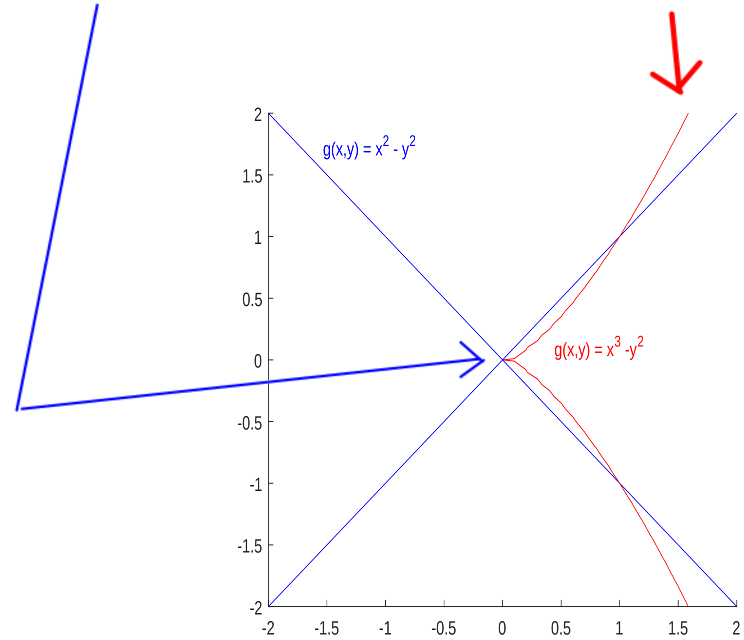
zum Ursprung : $g(x,y) = g(-x,-y)$

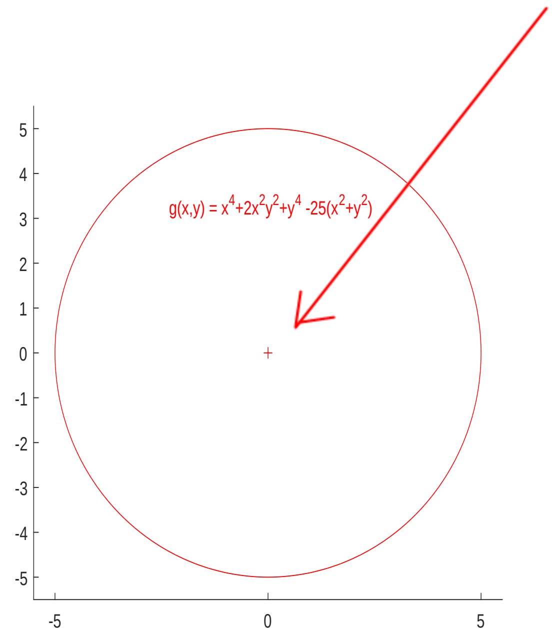
Kreis: da in g nur gerade Potenzen auftauchen, ist die Kurve symmetrisch zur $x-$Achse, zur $y-$Achse und zum Ursprung.

Der Kreis hat keine Punkte mit $g_x = g_y = 0$. Sogenannte **singuläre Punkte**.

Bei **singulären Punkten** unterscheidet man zwischen

Doppelpunkten, Rückkehrpunkten/Spitzen und isolierten Punkten





Allgemein: Kurve im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(x, y) = 0$$

Punkt auf der Kurve

Singulärer Punkt: $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$

In einem solchen Punkt: keine Garantie, dass die Kurve nach x oder y parametrisiert werden kann.

Klassifikation über die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Hessematrix $Hg(x_0, y_0)$ von g

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Doppelpunkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: **isolierter Punkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix $\neq$ Nullmatrix : **Rückkehrpunkt/Spitze**.

Horizontale Tangente: $g_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0.$

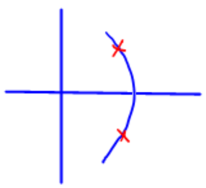
Vertikale Tangente: $g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_x(x_0, y_0) \neq 0.$

Beispiel 8:

Kurve beschrieben durch:

$$g(x,y) = \left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

a) **Symmetrien**



$$g(x,-y) = \left(x^2+4(-y)^2\right)^2 + x^2 - 4(-y)^2$$
$$= \left(x^2+4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = g(x,y)$$

$\Longrightarrow$ Kurve symmetrisch bzgl. x-Achse

analog folgt $g(x,y) = g(-x,y) = g(-x,-y)$

$\Longrightarrow$ die Kurve ist symmetrisch zur $y-$Achse, zur $x-$Achse und zum Ursprung.

b) **singuläre Punkte und Punkte mit horizontaler Tangente**

$$g_x(x,y) = 2(x^2+4y^2)2x + 2x \overset{!}{=} 2x\underbrace{(2x^2+8y^2+1)}_{\geq 1} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Einsetzen von $x = 0$ in g: Welche Punkte mit $x=0$ liegen auf der Kurve?

$$g(0,y) = \left(4y^2\right)^2 - 4y^2 \overset{!}{=} 0$$

$$g(0,y) = (4y^2)^2 - 4y^2 \overset{!}{=} 0 \iff 4y^2\left[4y^2 - 1\right] \overset{!}{=} 0 \implies y = 0 \text{ oder } 4y^2 - 1 = 0 \implies y^2 = \frac{1}{4} \implies y = \pm 1/2$$

Kandidaten: $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$$g_y = \underline{2(x^2 + 4y^2)8y - 8y} = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1)$$

$$g_y(0, \pm\tfrac{1}{2}) = \pm 4\,(0 + 2 - 1) = \pm 4 \neq 0$$

$$g_y(0,0) = 0$$

Punkte mit horizontaler Tangente $\underset{y=0 \,\vee\, \pm 1/2}{g} = \underbrace{g_x}_{x=0} = 0$, $g_y \neq 0$: $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Singuläre Punkte: $g = g_x = \underline{g_y = 0}$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Klassifizierung des singulären Punktes: Vorzeichen der Determinante von Hessematrix

$g_x(x,y) = 4x^3 + 16xy^2 + 2x$ $\qquad$ $g_y(x,y) = 16x^2y + 64y^3 - 8y$

$$g_{xx} = 12x^2 + 16y^2 + 2$$
$$g_{xy} = 32xy$$
$$g_{yy} = 16x^2 + 192y^2 - 8$$

damit erhält man $\quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} g_{xx}(x,y) & g_{xy}(x,y) \\ g_{yx}(x,y) & g_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -8$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Es liegt also ein Doppelpunkt vor.

c) Punkte mit **vertikaler Tangente** $g = g_y = 0,\ g_x \neq 0.$

$$g_y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff y = 0 \vee 2x^2 + 8y^2 - 1 = 0$$

Kandidaten mit $g_y = 0$

$\boxed{y = 0}$ eingesetzt in g

Welche Punkte mit $y=0$ liegen auf der Kurve?

$$g(x, 0) = \underbrace{(x^2 + 0)^2 + x^2}_{x^2(x^2+1)=0} = 0 \iff \boxed{x = 0}$$

$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

kennen wir schon: Ist der singuläre Punkt

(*) $\underbrace{2x^2 + 8y^2 - 1 = 0}_{8y^2 = 1 - 2x^2} \iff 4y^2 = \frac{1}{2} - x^2$

eingesetzt in g

Welche Punkte mit (*) liegen auf der Kurve?

$$g(x, y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 = \left(x^2 + \tfrac{1}{2} - x^2\right)^2 + x^2 - \left(\tfrac{1}{2} - x^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$\iff \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2x^2 = 0 \implies 2x^2 = \frac{1}{4}$

$$\iff x^2 = \frac{1}{8}, \qquad y^2 = \frac{1}{8}(1 - 2x^2)$$

$\Downarrow$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$

$y^2 = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32}$

$\Downarrow$

$y = \pm \sqrt{\frac{3}{32}}$

Kandidaten: $P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} \\ \pm\sqrt{3/32} \end{pmatrix}$ $\quad P_{5,6} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{8} \\ \pm\sqrt{3/32} \end{pmatrix}$

Zu prüfen ist noch $\underline{g_x \neq 0}$

Wir hatten oben $\underline{g_x = 0 \iff x = 0}$

Also ist $g_x \neq 0$ in P_3, P_4, P_5, P_6

Alle 4 Punkte sind Punkte mit vertikalen Tangenten