

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 4 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

**Extrema,
Satz über implizite Funktionen,
Ebene Kurven**

,

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Erlaubte Hilfsmittel

für die Klausur Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter = 8 Seiten DIN-A4

Nur DGL I (Teile der LUM/BUW Studierenden): 2 Blätter = 4 Seiten DIN-A4

Extrema ohne Nebenbedingungen:

Extrema : Sammelbegriff für Minima und Maxima

$$D \subset \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Lokales Minimum bzw. Maximum in \mathbf{x}_0 : es gibt Umgebung U von \mathbf{x}_0 mit

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U$$

Globales Minimum bzw. Maximum in \mathbf{x}_0 :

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

Existenz von globalem Minimum und Maximum gesichert, falls D kompakt (abgeschlossen und beschränkt) und f stetig!

Striktes/strenges Maximum/Minimum, wenn oben \leq bzw. \geq durch $<$ bzw. $>$ ersetzt werden kann.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion, dann ist eine

NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EXTREMA IN D°

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = 0$$

Im \mathbb{R}^1 : $f'(x_0) = 0$.

Wird sofort klar mit:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \neq 0 \implies \exists \mathbf{v} \text{ mit } \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} > 0$$

\mathbf{v} ist Aufstiegsrichtung! Kein Max in \mathbf{x}_0

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (-\mathbf{v}) < 0$$

$-\mathbf{v}$ ist Abstiegsrichtung! Kein Min in \mathbf{x}_0

Achtung: Randpunkte gesondert betrachten! (wie im \mathbb{R}^1)

Beispiel:

$$f(x) = x^2, D = [-1, 2], f'(x) = 0 \implies x = 0$$

Minimum in Null. Intervall kompakt. Wo bleibt das Maximum?

Analoges gilt im Fall $D \subset \mathbb{R}^n; n > 1$.

stationäre Punkte: Punkte mit $\text{grad } f(x_0) = 0$

Im eindimensionalen:

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$: Maximum, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$: Minimum

Im mehrdimensionalen:

Typ des stationären Punktes (Maximum/Minimum/ Sattelpunkt): abhängig von den Vorzeichen der Eigenwerte der Hessematrix $Hf(x_0, y_0)$

Denn im stationären Punkt gilt $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = 0$ und

$$f(\mathbf{x}_0 \pm h\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \text{grad } f(\mathbf{x}_0), h\mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2}h\mathbf{v}^T H f(\mathbf{x}_0 \pm \theta h\mathbf{v})h\mathbf{v}$$

Klassifikation:

EW'e von $Hf(\mathbf{x}_0)$	Typ
Alle EW'e > 0	Minimum
Alle EW'e < 0	Maximum
Alle EW'e ≥ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Minimum oder Sattel
Alle EW'e ≤ 0 $\wedge \exists \lambda_j \neq 0$	Maximum oder Sattel
$\exists \lambda_j < 0 \wedge \exists \lambda_k > 0$	Sattelpunkt
Alle EW'e $= 0$	keine Klassifikation mit dieser Methode möglich

Beispiel 1)

$f(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ mit

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = 7,$$

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 7$$

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7, \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$\text{grad } f(x, y) = (2x + y - 2, 2y + x + 3)$$

$$\text{grad } f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases} \iff$$

Kandidat(en) für ein Extremum (Extrema):

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} =$$

$$\implies \begin{cases} \det Hf(P) = \\ Hf_{11}(P) \end{cases} \quad Hf(P) \text{ ist } \dots \text{ definit}$$

Alternativ: Eigenwerte

$$\det (Hf(x_0, y_0) - \lambda E) =$$

Alternativ: Gerschgorin

Beispiel 2) Bestimmen und klassifizieren Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = y^2 x^3 - 3y^2 x + 12y.$$

Lösung:

$$f_x(x, y) = 3x^2 y^2 - 3y^2 = 0 \iff$$

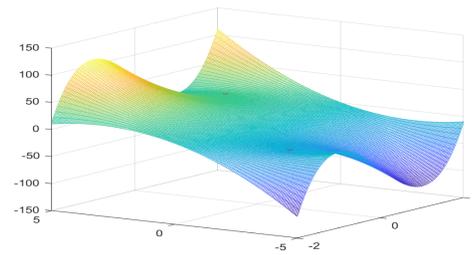
$$f_y(x, y) = 2yx^3 - 6xy + 12 \stackrel{!}{=} 0$$

Zur Klassifikation bestimme Hessematrizen in den stationären Punkten P_1, P_2

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} Hf_{xx}(x, y) & Hf_{xy}(x, y) \\ Hf_{yx}(x, y) & Hf_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6yx^2 - 6y \\ 6yx^2 - 6y & 2x^3 - 6x \end{pmatrix}$$

$$Hf(1, 3)$$

$$Hf(-1, -3)$$



Satz über implizite Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, g sei C^k Funktion, $k \geq 1$.

Gesucht : Lösungen von $g = 0$

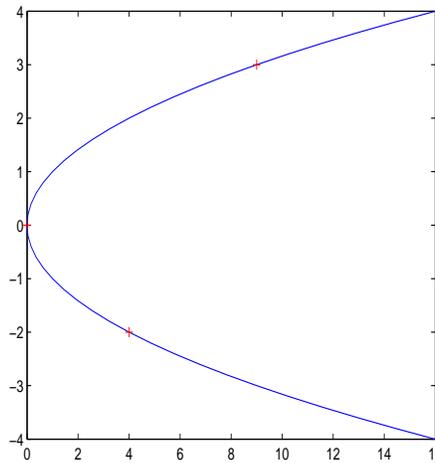
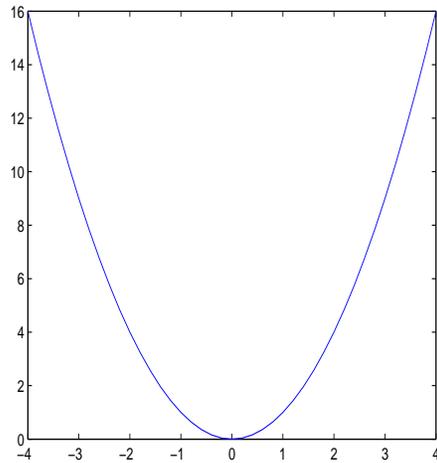
m Gleichungen, n Unbekannte. Mehr Variablen als Gleichungen.

Frage: kann man die eine oder andere Variable eliminieren? Wenn ja, welche?

Einfaches Beispiel 3: $g(x, y) = x^2 - y = 0 \implies x = \pm\sqrt{y}$

Eindeutige Auflösung nach x global nicht möglich.

Was passiert lokal? Also in einzelnen Punkten.



$(x_0, y_0)^T := (3, 9)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
 $x = f(y) := \sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (-2, 4)^T$: In der Nähe dieses Punktes gilt
 $x = f(y) := -\sqrt{y}$

$(x_0, y_0)^T := (0, 0)^T$: In der Nähe dieses Punktes ist
keine eindeutige Auflösbarkeit gegeben! Hier ist $g_x = 2x|_{x=0}$

In der Nähe von $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ gilt $x = -\sqrt{y} = f(y)$

Klassisch gerechnet:

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = \left(-y^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

Im folgenden Satz

$$\mathbf{J}f(y) = ?$$

$$\mathbf{J}f(y) = f'(y) = - (\mathbf{J}g_x(x, y))^{-1} \cdot \mathbf{J}g_y(x, y)$$

Für $g(x, y) = x^2 - y$ also

$$\mathbf{J}f(y) = f'(y) =$$

Beispiel 4: $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ beschreibt einen Kreis mit Radius 5 um Null.

Global kann man keine Variable eliminieren.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2} \text{ oder auch } y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$$

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt

$$y = h(x) := \sqrt{25 - x^2}$$

Eine Auflösung nach x ist nicht möglich. Hier ist wieder $g_x = 2x = 0$.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$x = f(y) := \sqrt{25 - y^2}$$

Eine Auflösung nach y ist nicht möglich. Hier ist $g_y = 2y = 0$.

Auskunft über den allgemeinen Fall gibt der

SATZ: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, g sei C^k Funktion, $k \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und

$$Jg_y := \frac{\partial g}{\partial y} := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \text{ regulär im Punkt } (x_0, y_0).$$

$\implies \exists$ lokal genau ein f mit $f(x_0) = y_0$, $g(x, y) = 0 \iff y = f(x)$.

g ist nach den Variablen y auflösbar!

f ist C^k -Funktion mit $Jf(x) = - \left(Jg_y(x, y) \right)^{-1} \cdot Jg_x(x, y)$.

Beispiel 5: Gegeben sei $g(x, y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0$.

Ist $g(x, y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (1, 1)^T$ nach y auflösbar?

Das heißt: gibt es eine Funktion $f(x)$ mit $f(1) = 1$, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x, y) = 0 \iff y = f(x).$$

Antwort: Ja, denn es gilt

$$g_y(x, y) = 4x^2 + 24x^4y^2 \implies g_y(1, 1) = 4 + 24 \neq 0.$$

Hier allerdings keine explizite Formel wie in den Eingangsbeispielen!

Man kann aber lokal die Funktion f durch Taylor-Polynome nähern.

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = y(1) + y'(1)(x - 1)$$

Wir brauchen $y'(1)$ für T_1 und für das Taylor-Polynom zweiten Grades
auch noch $f''(1)$ bzw, $y''(1)$

Implizites Differenzieren

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}g(x, y(x)) = g_x + g_y \cdot y'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) = y'(x) = -\frac{g_x}{g_y} \quad \text{das ist die Aussage aus dem Satz}$$

In $(x_0, y_0)^T := (1, 1)^T$ gilt also mit $g(x, y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12$

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{8xy + 32x^3y^3}{4x^2 + 24x^4y^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{g_x(1, 1)}{g_y(1, 1)} = -\frac{8 + 32}{4 + 24} = -\frac{10}{7}$$

Das Taylorpolynom ersten Grades für g mit Entwicklungspunkt $x = 1$ ist also

$$T_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \frac{10}{7}(x - 1)$$

Alternative Berechnung von $f'(1)$:

$$g(x, y(x)) = 4x^2y(x) + 8x^4(y(x))^3 - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dg}{dx}(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx}g(x, y(x)) = 8xy(x) + 4x^2y'(x)$$

$$+ 32x^3(y(x))^3 + 8x^4 \cdot 3(y(x))^2 \cdot y'(x) = 0$$

$$= (8xy(x) + 32x^3(y(x))^3) + (4x^2 + 24x^4 \cdot (y(x))^2)y'(x) = 0 \quad (*)$$

$$\stackrel{x \neq 0}{\iff} y'(x) = -\frac{8xy + 32x^3y^3}{4x^2 + 24x^4y^2} = -\frac{8y + 32x^2y^3}{4x + 24x^3y^2}$$

Durch Einsetzen von $x = y = 1$ erhält man $y'(1) = -\frac{8 + 32}{4 + 24} = -\frac{10}{7}$.

Das hatten wir auch schon oben!

Für T_2 bräuchte man $f''(1)$: erneut (*) implizit differenzieren!

$$\frac{d}{dx}g(x, y(x)) = 8xy(x) + 32x^3(y(x))^3 + (4x^2 + 24x^4 \cdot (y(x))^2) \cdot y'(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}g(x, y(x)) &= 8y + 8xy' + 96x^2y^3 + 32x^3 \cdot 3y^2 \cdot y' \\ &+ (8x + 96x^3 \cdot y^2 + 48x^4y \cdot y') \cdot y' \\ &+ (4x^2 + 24x^4 \cdot y^2) y'' = 0\end{aligned}\quad (**)$$

Durch Einsetzen von $x = y(1) = 1$ und $y' = -\frac{10}{7}$ erhält man

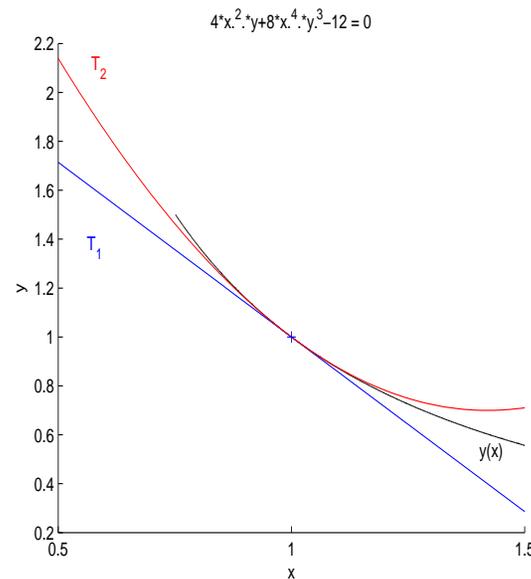
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}g(x, y(x)) \Big|_{(1, y(1))} &= 8 + 8\left(-\frac{10}{7}\right) + 96 + 96\left(-\frac{10}{7}\right) \\ &+ \left(8 + 96 + 48\left(-\frac{10}{7}\right)\right) \left(-\frac{10}{7}\right) + (4 + 24)y''(1) = 0\end{aligned}$$

$$104\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(104 - \frac{480}{7}\right)\left(-\frac{10}{7}\right) = -28y''(1)$$

$$\implies y''(1) = -3.3994\dots$$

Als Taylor-Polynom zweiten Grades ergibt sich für unser Beispiel

$$T_2(x; 1) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2 = 1 - \frac{10}{7}(x-1) - \frac{3.3994\dots}{2}(x-1)^2.$$



Beispiel 6: Durch die einzelne Gleichung

$$g(x, y, z) = xy \sin(z) - (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

ist **implizit** eine **Fläche** definiert.

Offensichtlich: $g(1, 1, 0) = 0$

$$g_x(x, y, z) = y \sin(z) - 2(x - 1)$$

$$g_y(x, y, z) = x \sin(z) + 2(y - 1)$$

$$g_z(x, y, z) = xy \cos(z)$$

$$g_x(1, 1, 0) =$$

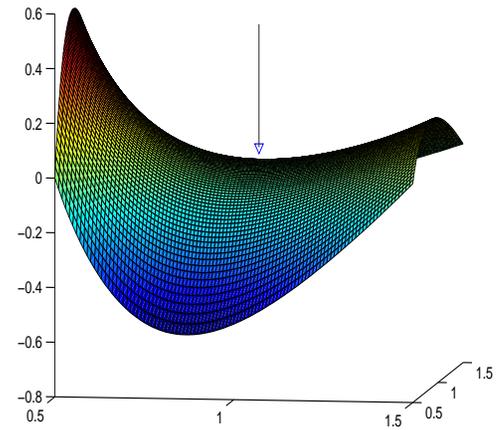
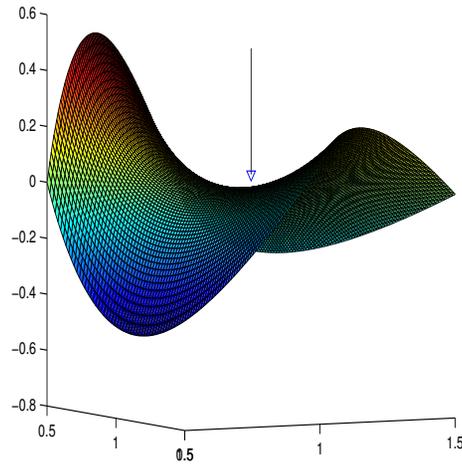
$$g_y(1, 1, 0) =$$

$$g_z(1, 1, 0) =$$

nach dem Satz kann im Lösungspunkt $(1, 1, 0)$ nach z aufgelöst werden.

$g_x(1, 1, 0) = g_y(1, 1, 0) = 0$: Der Satz garantiert also keine Auflösbarkeit nach x oder y . Er schließt aber auch nichts aus! Warum?

Bei expliziter Auflösbarkeit nach z erhält man eine **explizite** Darstellung der Fläche: $(x, y, z(x, y))$



Ebene Kurven, singuläre Punkte

Beispiel 7: Der Kreis $g(x, y) := x^2 + y^2 - 25 = 0$ hat horizontale Tangenten für $g_x = 2x = 0$, vertikale Tangenten für $g_y = 2y = 0$,

Symmetrie:

zur x -Achse : $g(x, y) = g(x, -y)$

zur y -Achse : $g(x, y) = g(-x, y)$

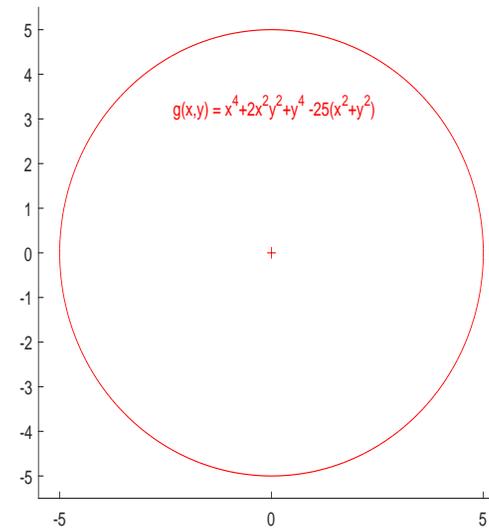
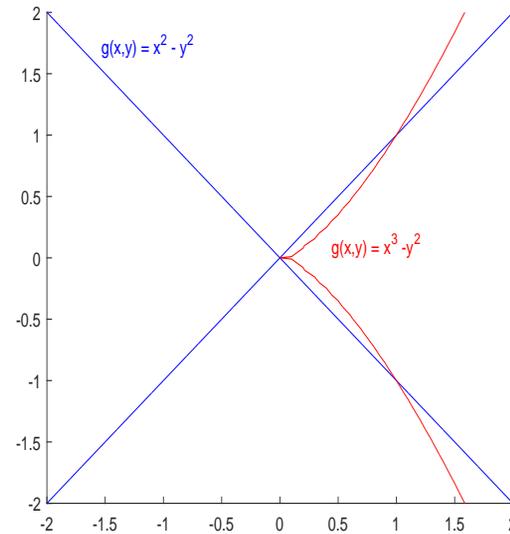
zum Ursprung : $g(x, y) = g(-x, -y)$

Kreis: da in g nur gerade Potenzen auftauchen, ist die Kurve symmetrisch zur x -Achse, zur y -Achse und zum Ursprung.

Der Kreis hat keine Punkte mit $g_x = g_y = 0$. Sogenannte **singuläre Punkte**.

Bei **singulären Punkten** unterscheidet man zwischen

Doppelpunkten, Rückkehrpunkten/Spitzen und isolierten Punkten



Allgemein: Kurve im \mathbb{R}^2 gegeben durch

$$g(x, y) = 0$$

Singulärer Punkt: $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

In einem solchen Punkt: keine Garantie, dass die Kurve nach x oder y parametrisiert werden kann.

Klassifikation über die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Hessematrix $Hg(x_0, y_0)$ von g

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$: **Doppelpunkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$: **isolierter Punkt**.

Falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ und Hessematrix \neq Nullmatrix : **Rückkehrpunkt/Spitze**.

Horizontale Tangente: $g_x(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Vertikale Tangente: $g_y(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ und $g_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Beispiel 8:

Kurve beschrieben durch:

$$g(x, y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

a) Symmetrien

$$g(x, -y) =$$

analog folgt $g(x, y) = g(-x, y) = g(-x, -y)$

\implies die Kurve ist symmetrisch zur y -Achse, zur x -Achse und zum Ursprung.

b) singuläre Punkte und Punkte mit horizontaler Tangente

$$g_x(x, y) = 2(x^2 + 4y^2)2x + 2x = 2x(2x^2 + 8y^2 + 1) = 0 \iff x = 0$$

Einsetzen von $x = 0$ in g :

$$g(0, y) = (4y^2)^2 - 4y^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Kandidaten: $P_0 =$ $P_1 =$ $P_2 =$

$$g_y = 2(x^2 + 4y^2)8y - 8y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1)$$

$$g_y(0, \pm\frac{1}{2}) =$$

$$g_y(0, 0) =$$

Punkte mit horizontaler Tangente $g = g_x = 0, g_y \neq 0$:

Singuläre Punkte: $g = g_x = g_y = 0$:

Klassifizierung des singulären Punktes: Vorzeichen der Determinante von Hessematrix

$$g_{xx} = 12x^2 + 16y^2 + 2$$

$$g_{xy} = 32xy$$

$$g_{yy} = 16x^2 + 192y^2 - 8$$

damit erhält man

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Es liegt also ein Doppelpunkt vor.

c) Punkte mit **vertikaler Tangente** $g = g_y = 0, g_x \neq 0$.

$$g_y = 8y(2x^2 + 8y^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff y = 0 \vee 2x^2 + 8y^2 - 1 = 0$$

$y = 0$ eingesetzt in g

$$g(x, 0) = (x^2 + 0)^2 + x^2 = 0 \iff x = 0$$

$$2x^2 + 8y^2 - 1 = 0 \iff 4y^2 = \frac{1}{2} - x^2$$

eingesetzt in g

$$g(x, y) = (x^2 + 4y^2)^2 + x^2 - 4y^2 =$$

$$\iff x^2 = \frac{1}{8}, \quad y^2 = \frac{1}{8}(1 - 2x^2)$$

Kandidaten: $P_{3,4} =$

$P_{5,6} =$

Zu prüfen ist noch $g_x \neq 0$

Wir hatten oben $g_x = 0 \iff x = 0$

