Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 3 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Taylor-Polynome, Polar–, Zylinder– und Kugelkoordinaten

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Taylorynome

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ z.B. $f : (x,y,z)^T \mapsto f(x,y,z)$

Erste partielle Ableitungen $-- >$ **Gradient** von f

grad $f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^T$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$

$$\textbf{grad}\ f(x_0,y_0,z_0) = (f_x(x_0,y_0,z_0),\ f_y(x_0,y_0,z_0), f_z(x_0,y_0,z_0))$$

Hessematrix von f:
Matrix der zweiten Ableitungen $H_{ij}(x,y) = f_{x_i x_j}$

$$\boldsymbol{J}(\text{grad}\, f(\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad}\, f_{x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, f_{x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \text{grad}\, f_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

In unserem Beispiel mit $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$ also $\begin{pmatrix} \text{grad}\, f_x(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, f_y(\boldsymbol{x}) \\ \text{grad}\, f_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$

$$Hf((x_0,y_0,z_0)) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0,z_0) & f_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{zx}(x_0,y_0,z_0) & f_{zy}(x_0,y_0,z_0) & f_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

f 2-mal stetig diff.bar $\Longrightarrow$ Hessematrix ist symmetrisch!

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$:

Taylorpolynom 0.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0**:** $T_0(x) = f(x_0)$

Taylorpolynom 1.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0**:**

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylorpolynom 2.ten Grades:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= T_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= T_1(x) + \frac{1}{2!} (x - x_0) f''(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

NEU: im $\mathbb{R}^n$: Entwickle $f(\boldsymbol{g}(h))$, $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$f: D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$

$T_0 = f(\boldsymbol{x}_0), \qquad T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^2:}$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \text{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) =$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^3:}$ analog:

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$
$$+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen $\times$ entsprechender Schrittweiten.

$\underline{D \subset \mathbb{R}^1:}$ $\quad T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}(x - x_0) f''(x_0)(x - x_0).$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^n:}$ $\quad T_2(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T \, Hf(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^2:}$

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right.$$

$$\left. + f_{yx}(x_0,y_0)(y - y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

Also $T_2 = T_1 + \dfrac{1}{2!} \sum$ 2-te Ableitungen $\times$ entsprechende Schrittweiten.

Für C^2-Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$ und damit

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f(x_0,y_0) \,+\, f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \,+\, f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ +\, \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \,+\, 2f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0)\right. \\ \left. + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Beachtet man noch:

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

so kann man T_2 auch schreiben als:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left[\binom{2}{2}\, f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\right. \\ \left. + \binom{2}{1}\, f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \binom{2}{0}\, f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^3:}$ $\quad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T, \; \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T,$

$$T_0(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) \, ,$$

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + < \text{grad}\, f(x_0, y_0, z_0), (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) >$$

$$= f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (x - x_0) + f_y \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (y - y_0) + f_z \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (z - z_0) \, .$$

$$T_2(x, y, z) = T_1(x, y, z) + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}^T H f(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \Big[f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ 2 \cdot f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2$$

$$+ 2 \cdot f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \Big]$$

Allgemein erhalten wir für $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$T_{m+1} = T_m + \frac{1}{(m+1)!} \sum (m+1)-\text{te Ableitungen} \times \text{entsprechende Schrittweiten.}$$

Und speziell für $D \subset \mathbb{R}^2$:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex, $\boldsymbol{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Definiere **Taylorpolynom** $m-$**ten Grades:** $T_m(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0)$ zu f mit Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)^T$:

$$T_0(\boldsymbol{x}) = T_0(x, y) := f(\boldsymbol{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$T_m(\boldsymbol{x}) = T_{m-1}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0)(x - x_0)^{m-k}(y - y_0)^k$$

Bsp.: $m = 4,\ k = 2,\ \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1\cdot 2)(1\cdot 2)}$

$f_{xxyy},\ f_{xyxy},\ f_{xyyx},\ f_{yxxy},\ f_{yxyx},\ f_{yyxx}$

Oben hatten wir T_2. Damit erhalten wir

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}}\cdot\frac{\partial^k}{\partial y^k}f(x_0,y_0)(x-x_0)^{3-k}(y-y_0)^k$$

$$= T_2(x,y) + \frac{1}{3!}\Bigg[\binom{3}{0}f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \binom{3}{1}f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)$$

$$\binom{3}{2}f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3}f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\Bigg]$$

Fehlerabschätzung:

Zur Erinnerung: im $\mathbb{R}^1$

$$T_{m+1}(x) = T_m(x) + \tfrac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0)(x - x_0)^{m+1}$$

$$R_m(x) := f(x) - T_m(x) = \tfrac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{m+1}$$

Analog im $\mathbb{R}^2$: Sei wie oben: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex,
$\boldsymbol{x}_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^{m+1} Funktion

Taylorpolynome:

$$T_0(\boldsymbol{x}) = T_0(x,y) := f(\boldsymbol{x}_0) = f(x_0,y_0)$$

$$T_m(\boldsymbol{x}) = T_{m-1}(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0,y_0)(x-x_0)^{m-k}(y-y_0)^k$$

$$T_{m+1}(\boldsymbol{x}) =$$

$$T_m(\boldsymbol{x}) + \tfrac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0,y_0)(x-x_0)^{m+1-k}(y-y_0)^k$$

Restterm / Fehler:

$$R_m(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - T_m(\boldsymbol{x})$$

$$= \tfrac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x-x_0)^{m+1-k}(y-y_0)^k$$

mit einem $\theta \in [0,1]$.

Beispiel A: Gesucht Taylorpolynome $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ zweiten Grades und $T_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ dritten Grades, für die Funktion

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) \text{ zum Entwicklungspunkt } \boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$$

sowie Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Lösung:

$$f(0,0) = 0e^{0-0} + \sin(0+0) = 0$$

$$f_x = ye^{x-y} + \cos(x+y) \qquad f_x(0,0) = 1$$

$$f_y = e^{x-y} - ye^{x-y} + \cos(x+y)$$

$$= (1-y)e^{x-y} + \cos(x+y) \qquad f_y(0,0) = 2$$

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y) \qquad f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{xy} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) \qquad f_{xy}(0,0) = 1$$

$$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y) \qquad f_{yy}(0,0) = -2$$

Vergleiche Seite 7:

$$
\begin{aligned}
T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \ &= f(x_0, y_0) + \binom{1}{0} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \binom{1}{1} f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left[\binom{2}{0} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\
&\qquad \left. + \binom{2}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]
\end{aligned}
$$

$$
T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \ = f(0,0) + \ f_x(0,0)(x - 0) + \ f_y(0,0)(y - 0)
$$

$$
\frac{1}{2!} \left[f_{xx}(0,0)(x - 0)^2 + 2 f_{xy}(0,0)(x - 0)(y - 0) + f_{yy}(0,0)(y - 0)^2 \right]
$$

Für T_3 zusätzlich benötigt: alle dritten Ableitungen. Wir hatten schon

$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y), \qquad f_{yx} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y)$ und
$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y)$

Und rechnen

$f_{xxx} =$ $\qquad$ $f_{xxx}(0,0) =$

$f_{xxy} =$ $\qquad$ $f_{yxx}(0,0) =$

$f_{xyy} =$ $\qquad$ $f_{yyx}(0,0) =$

$f_{yyy} = (-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y)$ $\qquad$ $f_{yyy}(0,0) =$

Formeln aus Seiten 7 und 10:

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) +$$

$$\frac{1}{3!}\left[\binom{3}{0} f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)\right.$$

$$\left. + \binom{3}{2} f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\right]$$

$$= x + 2y + xy - y^2 + \ldots.$$

Fehlerabschätzung für T_2

$$f(\boldsymbol{x}) = T_2(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0) + R_2(\boldsymbol{x};\, \boldsymbol{x}_0)\,.$$

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x - x_0)^{3-k}(y - y_0)^k$$

Sieht kompliziert aus! Einfacher aber auch grober:

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|R_2(x,y)| &\le \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3} \left| \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))(x - x_0)^{3-k}(y - y_0)^k \right| \\
&= \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3} \left|\binom{3}{k}\right| \cdot \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \right| \cdot \left| (x - x_0)^{3-k}(y - y_0)^k \right| \\
&\le \frac{1}{3!}\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\right) \max_{k,\theta}\left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \right| \right\} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3
\end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k} 1^k 1^{3-k} = (1+1)^3$$

Also

$$|R_2(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{3!} \cdot 2^3 \cdot \max_{0\leq k\leq 3, \theta\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \right| \right\} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3$$

Finde $C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung 3 in **allen** Punkten $\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in [0,1]$

Dann gilt im $\mathbb{R}^2$:

$|R_2(x; x_0)| \leq \frac{2^3}{3!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \cdot C$

Allgemeiner Fall:

$$\boxed{|R_m(x;x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C}$$

n: Dimension des Raumes

m: Grad des Taylorpolynoms

$n =$ Dimension des Raumes $\Longrightarrow \exists\, n^{m+1}$ "verschiedene,, $(m+1)-$te Ableitungen

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m+1$ in **allen** Punkten $\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \quad \theta \in [0,1]$

Beachte: Fehlerabschätzung (fast) immer nur lokal möglich!

Fehler R_2 für unser Beispiel:

Wir hatten Taylorpolynom $T_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0) = x + 2y + xy - y^2$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x + y) \; + \; ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0)^T$. Gesucht: eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Allgemeine Formel

$$\boxed{|R_m(x; x_0)| \leq \tfrac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C}$$

$m =$ Grad des Polynoms $=$ $\qquad$ $n =$ Dimension des Raumes $=$

$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} =$

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ zwischen $(x_0, y_0)^T$ und $(x, y)^T$

Hier:

$$|f_{xxx}| = \left| y e^{x-y} - \cos(x+y) \right| \leq$$

$$|f_{xxy}| = \left| (1-y) e^{x-y} - \cos(x+y) \right| \leq$$

$$|f_{xyy}| = \left| (y-2) e^{x-y} - \cos(x+y) \right| \leq$$

$$|f_{yyy}| = \left| (-y+2+1) e^{x-y} - \cos(x+y) \right| \leq$$

Maximaler Betrag der dritten Ableitungen $\leq$

Und mit $|R_m(x;x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C$

$$|R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)| \; \leq \; \frac{2^3}{3!} . C \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \leq$$

Beispiel B: (Zur HA2)

$$g(x, y) = ye^{x-y} \; + \; \sin(x + y) + 2x^2 - 3x + 4y.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von g zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \; D := [-0.2, 0.2] \times [-0.2, \; 0.2]$ gilt:

$$|g(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{1}{10}\,.$$

Lösung: $g(x, y) = ye^{x-y} \; + \; \sin(x + y) + 2x^2 - 3x + 4y.$

Alternative zur Ableitungsberechnung: Potenzreihen:

$$\boldsymbol{e}^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \; = \; \frac{\alpha^0}{0!} + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \; \ldots$$

$$\sin(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \; = \; \frac{\alpha^1}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} \pm \; \ldots$$

$ye^{x-y} =$

$\sin(x+y) =$

$g(x,y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) + 2x^2 - 3x + 4y$

$T_2(x,y) =$

Für die Fehlerabschätzung brauchen wir eine obere Schranke für die Beträge aller dritten Ableitungen von g.

dritte Ableitungen von $g =$ dritte Ableitungen von $ye^{x-y}+$ dritte Ableitungen von $\sin(x+y)$

Fehlerabschätzung: $g(x,y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) + 2x^2 - 3x + 4y$

$|$ dritte Ableitungen von $g| \leq |$ dritte Ableitung von $ye^{x-y}| + |-\cos(x+y)|$

Für die dritte Ableitungen von $h(x,y) = ye^{x-y}$ rechnen wir (vgl. Seite 15)

$$h(x,y) = h_x(x,y) = h_{xx}(x,y) = h_{xxx}(x,y) = ye^{x-y}$$

$$h_y(x,y) = h_{xy}(x,y) = h_{xxy}(x,y) = (1-y)e^{x-y}$$

$$h_{yy}(x,y) = h_{xyy}(x,y) = (y-2)e^{x-y}$$

$$h_{yyy}(x,y) = (3-y)e^{x-y}$$

$$|g(x,y) - T_2(x,y)| \leq \tfrac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1} C = \frac{2^3}{3!}.C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \leq$$

Anderer Entwicklungspunkt und $\mathbb{R}^3$:

Beispiel C: Gesucht Taylorpolynom zweiten Grades von
$f(x,y,z) = \sin(x+y) \, + \, xe^{z-y} \, - \, z^2 \, + \, y \qquad \boldsymbol{x}_0 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

	im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$
$f(x,y,z) = \sin(x+y) \, + \, xe^{z-y} \, - \, z^2 \, + \, y,$	$f(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
	$= \sin(0) \, - \, \frac{\pi}{4}e^0 - \, (\frac{\pi}{4})^2 + \, \frac{\pi}{4}$
$f_x(x,y,z) = \cos(x+y) + e^{z-y},$	$f_x(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \cos(0) + e^0 = 2$
$f_y(x,y,z) = \cos(x+y) - xe^{z-y} + 1,$	$f_y(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = 2 + \frac{\pi}{4}$
$f_z(x,y,z) = xe^{z-y} - 2z,$	$f_z(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, - \frac{3\pi}{4}$
$f_{xx}(x,y,z) = -\sin(x+y),$	$f_{xx}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, 0$
$f_{xy}(x,y,z) = -\sin(x+y) - e^{z-y},$	$f_{xy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, -1$
$f_{xz}(x,y,z) = e^{z-y},$	$f_{xz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, 1$
$f_{yy}(x,y,z) = -\sin(x+y) + xe^{z-y},$	$f_{yy}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, - \frac{\pi}{4}$
$f_{yz}(x,y,z) = -xe^{z-y},$	$f_{yz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, \frac{\pi}{4}$
$f_{zz}(x,y,z) = xe^{z-y} - 2,$	$f_{zz}(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \, - \frac{\pi}{4} \, - \, 2$

Formeln aus Seite 8:

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = {} & f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) \\
& + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\
& + \frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + 2\cdot f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
& + 2\cdot f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 \\
& + 2\cdot f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0) + f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2\Big]
\end{aligned}
$$

$x_0 = -\frac{\pi}{4},\ y_0 = \frac{\pi}{4},\ z_0 = \frac{\pi}{4}$

einsetzen

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = {} & f(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) + f_x(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4})) \\
& + f_y(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) + f_z(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) \\
& + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))^2 + 2\cdot f_{xy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) \\
& + 2\cdot f_{xz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4}) + f_{yy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})^2 \\
& + 2\cdot f_{yz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) + f_{zz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})^2\Big] \\
& =
\end{aligned}
$$

Ableitungswerte einsetzen:

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z) = {} & \underbrace{f(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{-(\frac{\pi}{4})^2} + \underbrace{f_x(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{2}(x-(-\frac{\pi}{4})) \\
& + \underbrace{f_y(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{2+\frac{\pi}{4}}(y-\frac{\pi}{4}) + \underbrace{f_z(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{-\frac{3\pi}{4}}(z-\frac{\pi}{4}) \\
& + \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{f_{xx}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{0}(x-(-\frac{\pi}{4}))^2 + 2\cdot \underbrace{f_{xy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{-1}(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) \\
& + 2\cdot \underbrace{f_{xz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{1}(x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4}) + \underbrace{f_{yy}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{-\frac{\pi}{4}}(y-\frac{\pi}{4})^2 \\
& + 2\cdot \underbrace{f_{yz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{\frac{\pi}{4}}(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) + \underbrace{f_{zz}(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}_{-\frac{\pi}{4}-2}(z-\frac{\pi}{4})^2 \Bigg]
\end{aligned}
$$

Zusammenfassen:

$$T_2(x,y,z) = -\frac{\pi^2}{16} + 2(x-(-\frac{\pi}{4})) + (2+\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{3\pi}{4}(z-\frac{\pi}{4})$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[-2\cdot(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) + 2(x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4})$$

$$-\frac{\pi}{4}(y-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{\pi}{2}(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})$$

$$+(-\frac{\pi}{4}-2)(z-\frac{\pi}{4})^2\Big]$$

$$T_2(x,y,z) = -\frac{\pi^2}{16} + 2(x-(-\frac{\pi}{4})) + (2+\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4}) - \frac{3\pi}{4}(z-\frac{\pi}{4})$$

$$-(x-(-\frac{\pi}{4}))(y-\frac{\pi}{4}) + (x-(-\frac{\pi}{4}))(z-\frac{\pi}{4})$$

$$-\frac{\pi}{8}(y-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{\pi}{4}(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4}) + (-\frac{\pi}{8}-1)(z-\frac{\pi}{4})^2\Big]$$

Fehlerabschätzung für $f(x,y,z) - T_2(x,y,z)$ für $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \leq \frac{1}{10}$ also

$$x \in [-\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{10}, -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{10}],\ y \in [\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{10}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{10}],\ z \in [\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{10}, \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{10}].$$

Wir benötigen alle dritten Ableitungen

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= -\sin(x+y), & f_{xy}(x,y,z) &= -\sin(x+y) - e^{z-y}, \\ f_{xz}(x,y,z) &= e^{z-y}, & f_{yy}(x,y,z) &= -\sin(x+y) + xe^{z-y} \\ f_{yz}(x,y,z) &= -xe^{z-y}, & f_{zz}(x,y,z) &= xe^{z-y} - 2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f_{xxx} = -\cos(x+y), && |f_{xxx}| \leq 1,\\
&f_{xxy} = -\cos(x+y), && |f_{xxy}| \leq 1,\\
&f_{xxz} = 0, && |f_{xxz}| = 0,\\
&f_{xyy} = -\cos(x+y) + e^{z-y}, && \\
&|f_{xyy}| \leq |-\cos(x+y)| + |e^{z-y}|, && |f_{xyy}| \leq 1 + e^{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{10})},\\
&f_{xyz} = -e^{z-y}, && |f_{xyz}| \leq e^{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}-(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{10})},\\
&f_{xzz} = e^{z-y}, && |f_{xzz}| \leq e^{\frac{2}{10}},\\
&f_{yyy} = -\cos(x+y) - xe^{z-y}, && \\
&|f_{yyy}| \leq |-\cos(x+y)| + |xe^{z-y}|, && \\
&\qquad\quad \leq 1 + |x| \cdot |e^{z-y}| < && |f_{yyy}| \leq 1 + (\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{10})e^{0.2}\\
&f_{yyz} = xe^{z-y}, && |f_{yyz}| \leq (\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{10})e^{0.2}\\
&f_{zzy} = -xe^{z-y}, && |f_{yzz}| \leq\\
&f_{zzz} = xe^{z-y}, && |f_{zzz}| \leq
\end{aligned}
$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen sind beschränkt durch

$$0 \leq 1 + e^{\frac{2}{10}} \ < \ 1 + \sqrt{e} \ < \ 1 + 2$$

Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist also zum Beispiel $C := 3$

Als Schranke für den Fehler erhält man

$|R_m(x;x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^{m+1}C$

Mit $n = 3,\ m = 2$

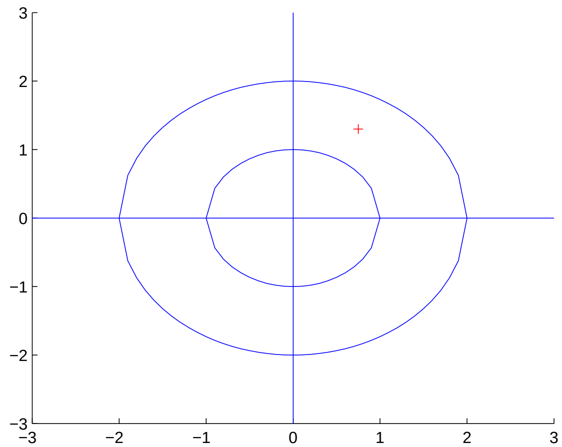
$$|R_2(x,y,z)| \ \leq \ \frac{3^3}{3!}\cdot C\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \ \leq \frac{27}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot(\frac{1}{10})^3 < \frac{27}{2000} \ = \ 0.0135.$$

Polar-, Kugel-, Zylinderkoordinaten

Später: Beschreibe die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ möglichst einfach durch Angabe von Grenzen für die Koordinaten.

Beispiel 1: $M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$

Geometrisch: Kreisring



Beschreibung in kartesischen Koordinaten

Einfacher als Kartesisch : **Polarkoordinaten** $x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

M_1 :

Das Gebiet ist viel einfacher.

Beispiel 2 Später z.B. integrieren von $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ über den halben Kreisring

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ 4 \ \leq \ x^2 + y^2 \ \leq \ 9, \qquad x \leq 0 \right\}$$

$r \in \qquad\qquad \phi \in$

Beispiel 3: $M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \qquad 0 \le \ x^2 + y^2 \le \ z, \ 0 \le \ z \le \ 9 \right\}$

Zylinderkoordinaten

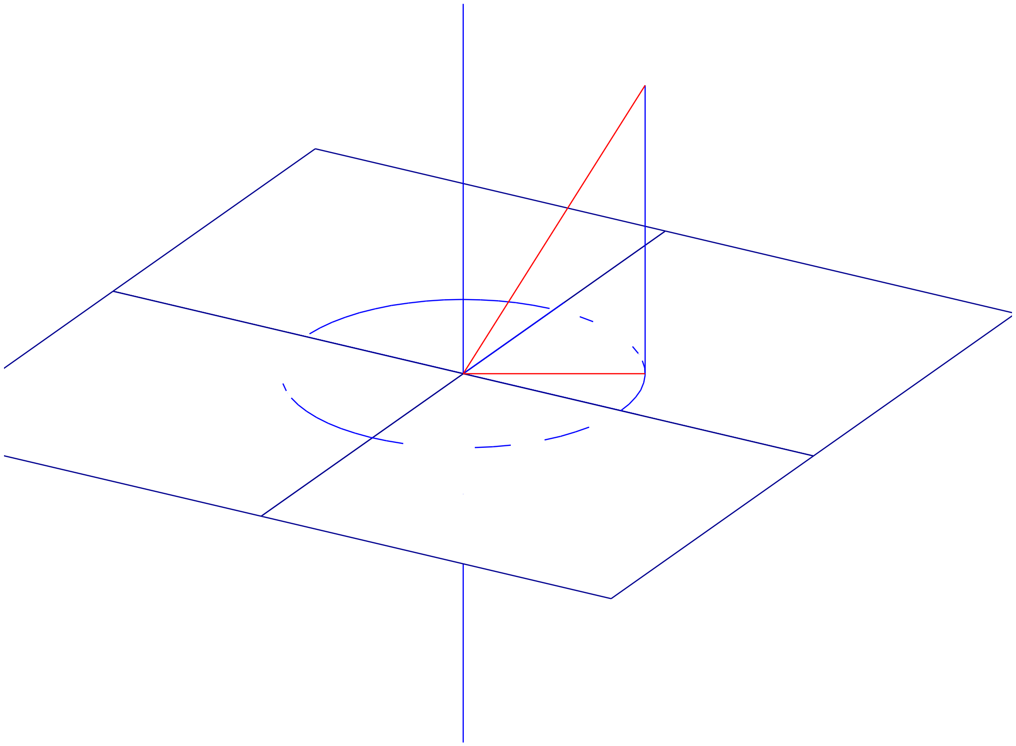
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Rand $\partial M_3 = 2$ Teilflächen:

Deckel:

Mantel:

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$



$r =$

$z =$

$R =$

$x =$

$y =$

Beispiel 4:

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq \; 4 \right\} .$$

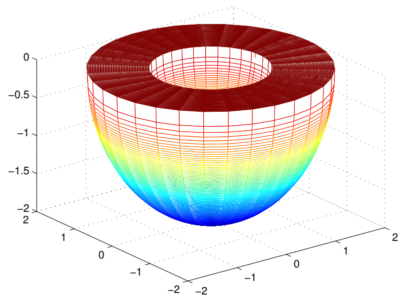
Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi,\theta) \\ y(r,\varphi,\theta) \\ z(r,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

M_4:

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; 1 \leq \; x^2 + y^2 + z^2 \leq \; 4 \right\} .$$

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ 4 \leq \ x^2 + y^2 + z^2 \leq \ 25 \, , \ z \leq \ 0 \right\} .$$



$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ 4 \leq \ x^2 + y^2 + z^2 \leq \ 25 \, , \ y \geq \ 0 \right\} .$$