Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 24/25

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 2 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html

Höhenlinien, Gradienten, Jacobi-Matrizen, Kettenregel, Richtungsableitungen, Vektorfelder, Rotation und Divergenz

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Analysis III Funktionen $D \subset \mathbb{R}^n\,,\ f : D \to\ \mathbb{R}^m$

Ana I: $D \subset \mathbb{R}^1\,,\ f : D \to\ \mathbb{R}^1$

Ana II: $D \subset \mathbb{R}^1\,,\ f : D \to\ \mathbb{R}^n$

L.A: $D \subset \mathbb{R}^n\,,\ f : D \to\ \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$

Hier zunächst wie in Übung 1: $D \subset \mathbb{R}^n\,,\ f : D \to\ \mathbb{R}^1$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Frage: Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn ich an einer oder an mehreren Variablen wackle?

Stetigkeit: wie im $\mathbb{R}^1$,

Kurzform: für jede Folge $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus D

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x})\,.$$

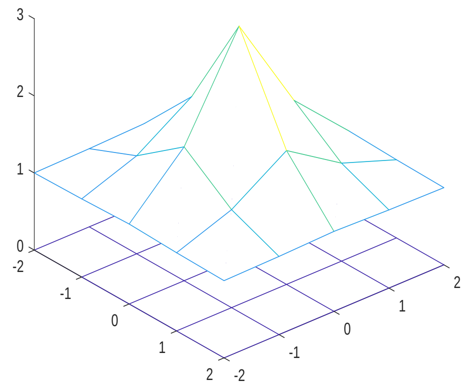
Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^1$: Stichworte

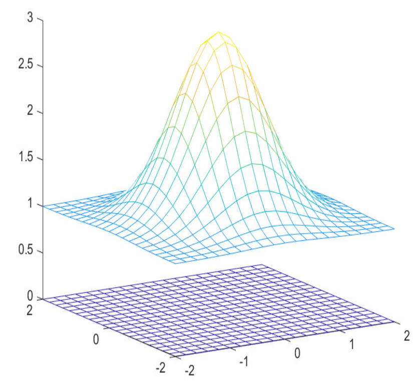
Tangentensteigung,

Hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Änderungsrate: Wie stark ändert sich der Wert von f bei Änderung von t?

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$





f heißt **partiell differenzierbar nach** x_j in $\boldsymbol{x} \in D$, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j + h \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

existiert. Im Falle der Existenz heißt der obige Wert

partielle Ableitung von f **nach** x_j $=: \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) =: f_{x_j}(\boldsymbol{x})$

f heißt partiell differenzierbar, wenn f nach allen Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle f_{x_j}, $j = 1, \ldots, n$ stetig sind.

Bei Existenz:

Gradient von f :=Zeilenvektor der partiellen Ableitungen

$$\textbf{grad}\ f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right).$$

Mit dem Differentialoperator Nabla

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\textbf{grad}\ f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})) = (\nabla \cdot f(x_1, \ldots, x_n))^T.$$

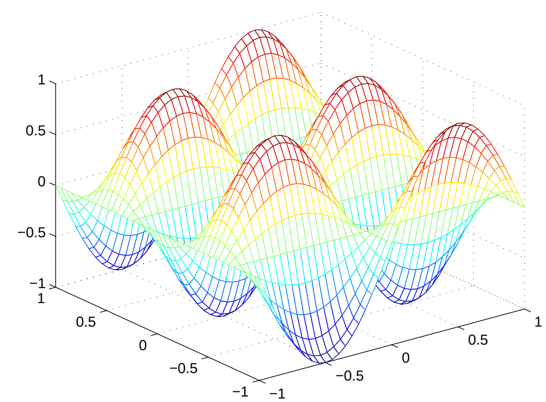
Veranschaulichung von Funktionen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$

Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiele: Temperatur an einzelnen Punkten einer Herdplatte, für ein Stück der Erde (näherungsweise eben, also Erdkrümmung vernachlässigt) Höhe über dem Meeresspiegel oder Luftdruck.

Veranschaulichung:

- Als Fläche $(x, y, f(x, y))^T \in \mathbb{R}^3$ (Modell einer Landschaft)



$f(x, y) \;=\; \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)$:

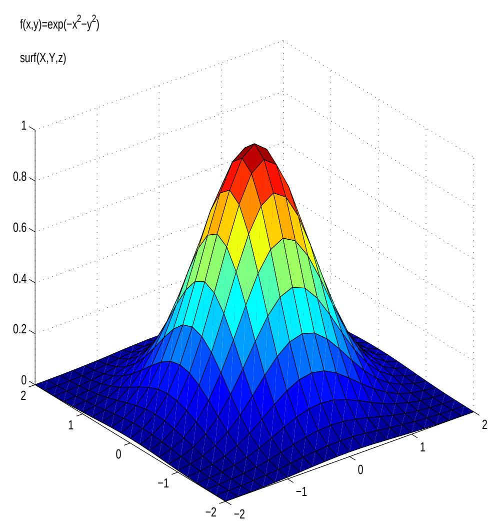
oder

- Mit Hilfe von **Höhenlinien** $=$ Kurven auf denen f konstant ist

Höhe über dem Meeresspiegel, Äquipotentiallinien, Isobaren

Beispiel 1: (P2) $z = f(x,y) \; = \; \exp\left(-(x^2 + \; y^2)\right),$

Höhenlinien: $\exp\left(-(x^2 + \; y^2)\right) = K \iff -(x^2 + \; y^2) = \; \ln(K) =: c$



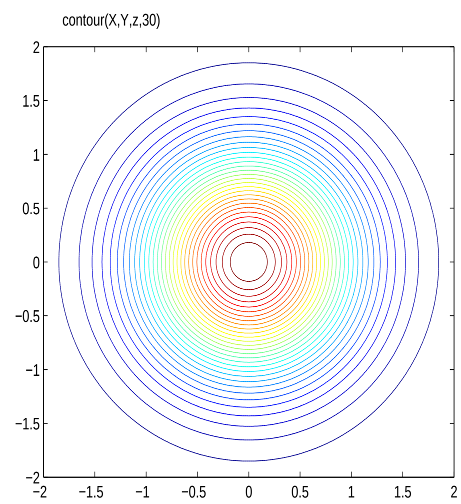


Abbildung 1: Höhenlinien

$$z = f(x,y) \;=\; \exp\left(-(x^2 +\; y^2)\right),$$

grad $f(\boldsymbol{x}) =$

Veranschaulichung von Gradientenfeldern

bei n=2: Hefte an Punkten (x, y) Vektoren in Richtung und Länge von grad$f(x, y)$ an.

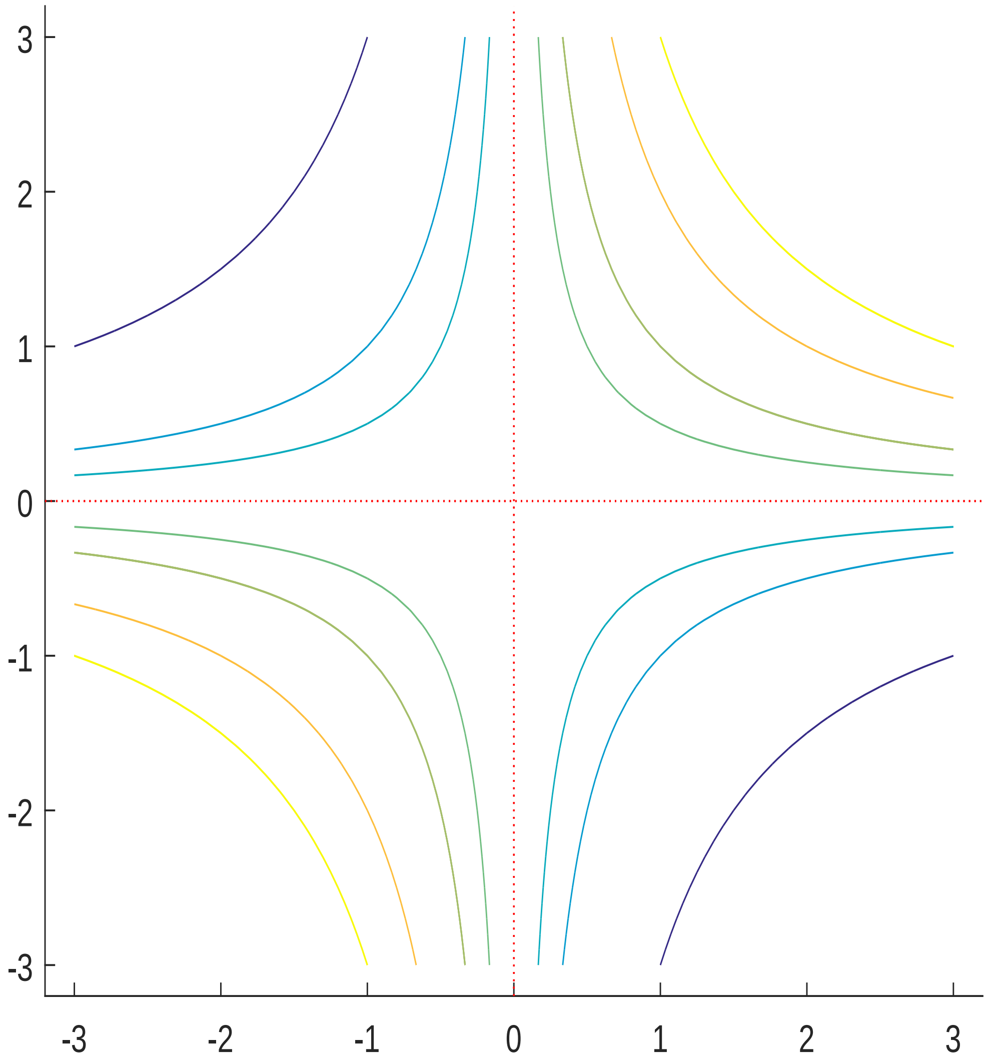
Beispiel 2: (P2)

$f(x, y) = \exp(xy) = e^{xy}$

Höhenlinien:

Gradient:

$\Longrightarrow \; \nabla f(x, y) =$

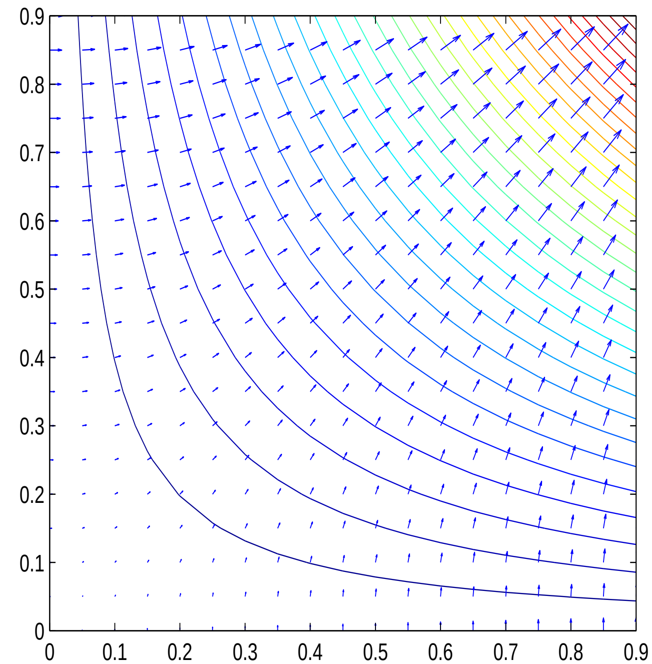


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Veranschaulichung von Gradientenfeldern mit Matlab

```
hold off
x=[-0.0 : .05 : .9];
y=[-0.0 : .05 : .9];
[X,Y] = meshgrid(x,y);
z= exp(X.*Y);
contour(X,Y,z,30) %Höhenlinien

hold on
[px,py] = gradient(z);  % Gradient
quiver(X,Y,px,py)   %in (X,Y) wird
%      der Vektor (px,py) angeheftet
```



ACHTUNG: Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt nicht einmal die Stetigkeit! (siehe Vorlesung)

Jetzt Bildraum mehrdimensional

Sei $\quad f : D \to \mathbb{R}^m , m \geq 1, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar $\iff$ Jede Komponente f_i von $\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar. Die Definition der Differenzierbarkeit kann wörtlich übertragen werden.
Im Falle der Existenz definiert man die **Ableitugs-/Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \text{grad}\, f_1(\boldsymbol{x}) \\ \ldots \\ \text{grad}\, f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Beispiel A1: (Zu H1)

$$\boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ g_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + 3yz \\ y^2 + z^2 \\ x^2 + 2y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) =$$

Im Fall $m = n$: **Funktionaldeterminante von f** := det $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Wichtig bei Koordinatentransformation!

Beispiel A2: (Zu H1) Polarkoordinaten :

$$\boldsymbol{g} \;:\; \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad g\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) & \\ r \cdot \sin(\phi) & \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y,z)|$:= det $\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z)$ = det

Kettenregel: $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}(D) \to \mathbb{R}^k$

$\Longrightarrow \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^k \wedge$

$$J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,.$$

Beispiel A3: (Hilfreich bei H1) $f^{[4]}$)

Elliptische Polarkoordinaten :

$$\boldsymbol{f} \;:\; \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad f\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar \cdot \cos(\phi) \\ br \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Mit g aus Beispiel A2 gilt

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{h}(x, y) = (ax, by)^T$

$$g\binom{r}{\phi} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\phi) \\ r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} =: \binom{x}{y} \xrightarrow{h} \binom{ax}{by} =$$

$\boldsymbol{Jf} = \boldsymbol{Jh} \cdot \boldsymbol{Jg}$ und

$\det(\boldsymbol{Jf}) = \det(\boldsymbol{Jh}) \cdot \det(\boldsymbol{Jg})$

$\boldsymbol{Jh} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ und $\det(\boldsymbol{Jh}) = ab.$

$\det(\boldsymbol{Jf})(r, \phi) = ab \cdot r.$

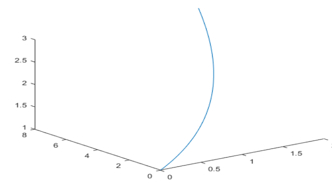
Beispiel A4: Wichtig für später!

Sei zum Beispiel:

$$s(t, x, y) = tx + t^2 x^2 y$$

wobei

$$x(t) = 2t^2,\ y(t) = 1+t$$



Wie verändert sich der Wert von s wenn wir t verändern?

$s(t,x,y) = tx + t^2x^2y$

Dann gilt:

$\frac{\partial}{\partial t}s(t,x,y) \;=\; s_t \;=\; (tx + t^2x^2y)_t =$

$\frac{\partial}{\partial x}s(t,x,y) \;=\; s_x = (tx + t^2x^2y)_x \;=$

$\frac{\partial}{\partial y}s(t,x,y) \;=\; s_y = (tx + t^2x^2y)_y \;=$

Aber was ist mit $\frac{d}{dt}s(t,x(t),y(t)) =$

Mit $\qquad g:\, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \\ 1+t \end{pmatrix},$

und $s(t,x,y) = tx + t^2x^2y$

definiere

$$f(t) = s \circ g(t) = s(t,x(t),y(t))$$

und erhalte

$$\frac{d}{dt}s(t, x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}f(t) \ = \ \boldsymbol{J}f(t) \ = \ \boldsymbol{J}s(g(t)) \cdot \boldsymbol{J}g(t)$$

$$\boldsymbol{J}s(t, x, y) \ = \ (s_t, s_x, s_y), \qquad\qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$$

$$\tfrac{d}{dt}s(t, x(t), y(t)) = \ (s_t, s_x, s_y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \ s_t + s_x \cdot \dot{x} + s_y \cdot \dot{y}$$

Hier konkret:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = \ (\dot{t}, \dot{x}(t), \dot{y}(t))^T \ = \ (1, 4t, 1)^T$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{s}(t, x, y) = \ (s_t, s_x, s_y)$$

und $\boldsymbol{J}f(t) \ = \tfrac{d}{dt}s(t, x(t), y(t)) = \ s_t + s_x \cdot \dot{x} + s_y \cdot \dot{y} =$

Richtungsableitungen (Zu H2)

Bis hier: Ableitung einer Funktion $D \subset \mathbb{R}^n, \quad f : D \to \mathbb{R}$ in Richtung der 1., 2., 3, ... Koordinate.

Jetzt allgemeiner: Sei $\quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}\| = 1$ und $\boldsymbol{x}_0 \in D$.

Frage: Wie ändert sich der Wert von f, wenn ich von $\boldsymbol{x}_0$ aus ein wenig in Richtung $\boldsymbol{a}$ gehe?

$$f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0) + ? \qquad h \in \mathbb{R}^+, \boldsymbol{x}_0 + th \cdot \boldsymbol{a} \in D, \forall t \in [0,1]$$

Definiere: Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ bei $\boldsymbol{x}_0$

$= \text{Änderungsrate von } f \text{ in Richtung } \boldsymbol{a}$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}}$$

Ist $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ positiv, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ größer. (Anstiegs- / Aufstiegsrichtung)

Ist $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ negativ, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ kleiner. (Abstiegsrichtung)

Vorlesung: $\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = < \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)^T, \boldsymbol{a} >.}$

Beweis: Kettenregel. Siehe Vorlesung:

Setze: $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
und $\quad z(h) := f(\boldsymbol{g}(h)), \quad z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Dann ist

$$\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} x_{0,1} + ha_1 \\ x_{0,2} + ha_2 \\ \vdots \\ x_{0,n} + ha_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

und im Falle der Existenz nach Kettenregel:

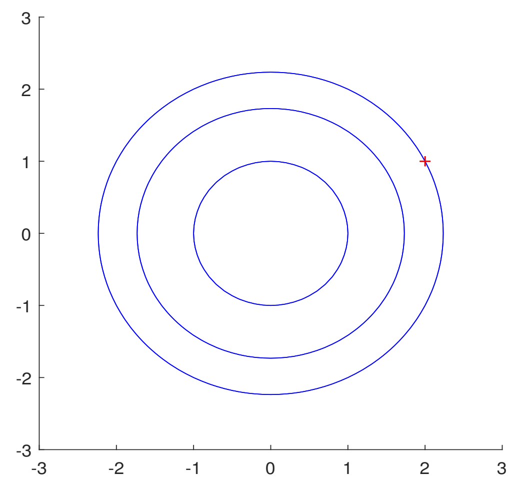
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{d}{dh} f(\boldsymbol{g}(h))|_{h=0} = \boldsymbol{J}(f(\boldsymbol{g}(0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}.}$$

Konkretes Beispiel aus der Vorlesung: $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- Für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)^T$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}$

  $$= (2x, 2y)|_{\boldsymbol{x}_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4,2) \cdot \binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} 6 = 3\sqrt{2}\,.$$



$\boldsymbol{a}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ **lokal** eine Aufstiegsrichtung

- Für $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4,2) \cdot \binom{-1}{1} = -\sqrt{2}.$

  $\boldsymbol{u}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ eine Abstiegsrichtung.

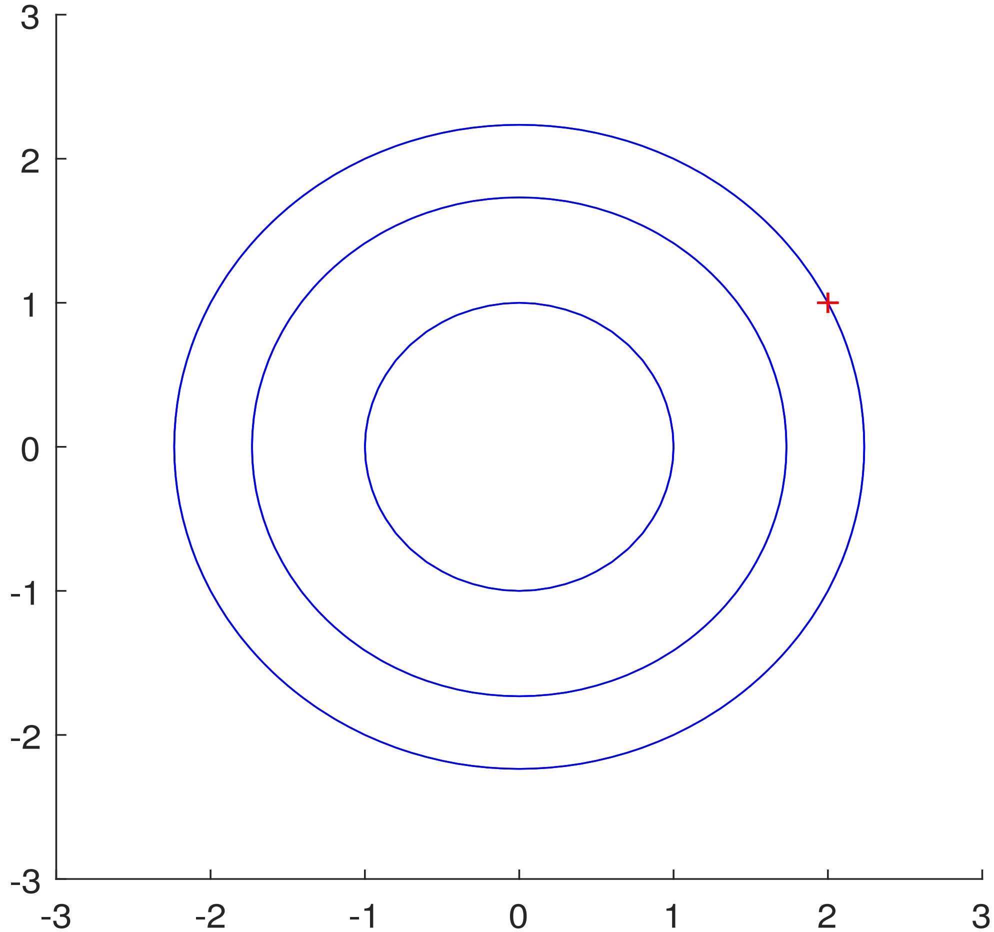
  $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$

  Wert in $\boldsymbol{x}_0$: $f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$

  Wert in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + 2\sqrt{2}\boldsymbol{u} =$

  $f(0,3) = 0^2 + 3^2 = 9.$

  Wie geht das denn? $\boldsymbol{u}$ war doch Abstiegsrichtung!



3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Niveaumenge/Niveaufläche (Zu H2)

Analog zu Höhenlinien im $\mathbb{R}^2$ definiert man für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ die Niveaumenge/Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ eines Punktes $\boldsymbol{x}_0$ als die Menge der Punkte, die den gleichen Funktionswert haben, wie $\boldsymbol{x}_0$:

$$N_{\boldsymbol{x}_0} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)\right\}$$

Beispiel: $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Niveauflächen: Kugeloberflächen/Sphären um Null

Gleichung für Niveaufläche in $\boldsymbol{x}_0 = (4, 3, 12)$

Vektorfelder (Zu P1, P3)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Hier nur $n = 2$ oder $n = 3$.

Beispiel: planare Strömung, Strömung in der Ebene

Betrachte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$. Zu jedem Punkt $\binom{x}{y} \in D$ gibt es einen Geschwindigkeitsvektor $\binom{u(x,y)}{v(x,y)}$, also eine Abbildung

$$f : D \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Veranschaulichung: (Nur bei hinreichend viel Zeit)

Hefte im Punkt $\binom{x}{y}$ den Vektor $\binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ an.

Es entstehen die sogenannten **Stromlinien**, Lösungen von $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$ bzw. Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = v(x,y)/u(x,y)\,.$$

Beispiel: $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{u}(x,y) := \binom{u(x,y)}{v(x,y} = \binom{2}{y}$.

$P_1 = \binom{-2}{0.25} \implies \boldsymbol{u}(P_1) = \binom{2}{0.25}$

$P_2 = \binom{0}{0.5} \implies \boldsymbol{u}(P_2) = \binom{2}{0.5}$

$P_3 = \binom{2}{1} \implies \boldsymbol{u}(P_3) = \binom{2}{1}$

Skizze: vor Ort. Pfeile haben die Steigung v/u.

Weg eines Teilchens in der Strömung $= (x, y(x))^T$ mit $y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$.

Hier $y'(x) = y(x)/2$. Dies ist eine separierbare DGL. Für $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2} \implies \ln|y| = \frac{x}{2} + \hat{c} \implies y(x) = ce^{\frac{x}{2}}.$$

Divergenz und Rotation

Gegeben: Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$. D.h.

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dann definiert man

$$\textbf{Divergenz von } \boldsymbol{f} : \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_n)$$

<u>n=2</u>

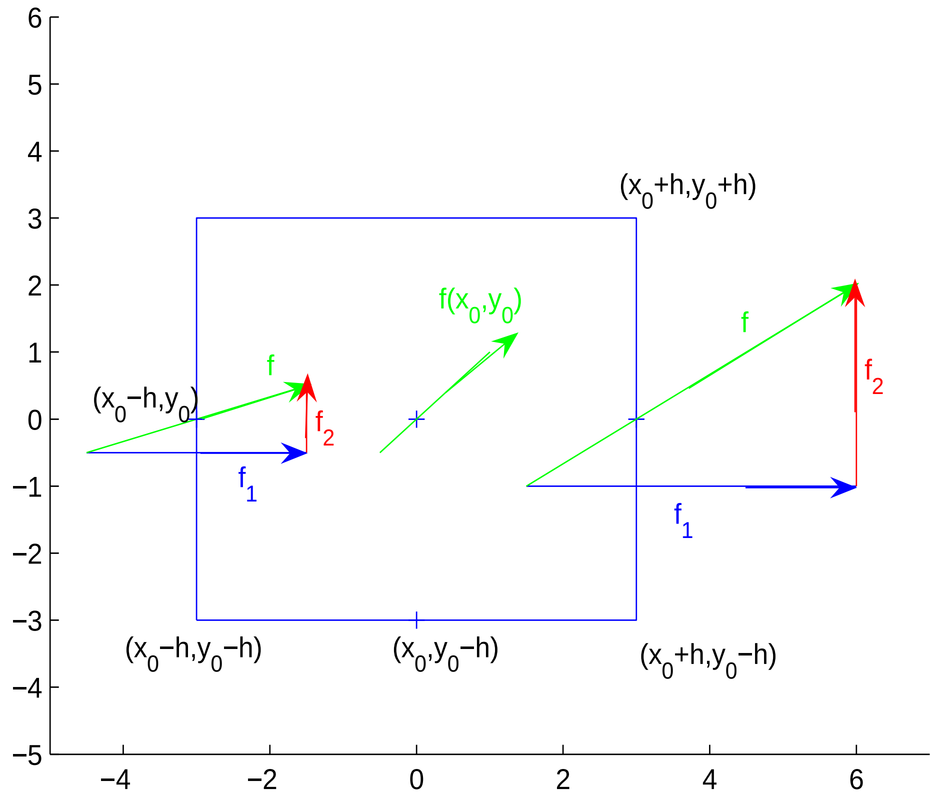
$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} f(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$$

n=3: $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y,\, z) \\ f_2(x,\, y,\, z) \\ f_3(x,\, y,\, z) \end{pmatrix},$

$$\text{div}\, f(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,\, y,\, z)$$

Bei Strömungs- / Flussproblemen: Quelldichte

Veranschaulichung: (Nur bei hinreichend viel Zeit)



Durch linke Kante fließt $\approx\ f_1(x_0 - h, y_0) \cdot 2h$ pro Zeiteinheit

Durch rechte Kante fließt $\approx\ f_1(x_0 + h, y_0) \cdot 2h$ pro Zeiteinheit

Analog unten $\approx\ f_2(x_0, y_0 - h) \cdot 2h$ und oben $\approx\ f_2(x_0, y_0 + h) \cdot 2h$

Aus dem Rechteck fließt pro Zeit- und Volumen(Flächen)einheit ca.

$$\frac{f_1(x_0 + h, y_0) \cdot 2h\ -\ f_1(x_0 - h, y_0) \cdot 2h}{(2h)^2}$$
$$+\frac{f_2(x_0, y_0 + h) \cdot 2h\ -\ f_2(x_0, y_0 - h) \cdot 2h}{(2h)^2}$$

Für $h \to 0$ ergibt sich die Quelldichte in (x_0, y_0) als

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(x_0 + h, y_0)\ -\ f_1(x_0 - h, y_0)}{2h} + \frac{f_2(x_0, y_0 + h)\ -\ f_2(x_0, y_0 - h)}{2h} \right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_0, y_0) = \mathrm{div} f(x_0, y_0)$$

Divergenz $= 0$: es fließt genauso viel rein, wie raus fließt : **Quellenfrei**

Im Fall $n = 3$ definiert man noch die **Rotation** bzw. **Wirbeldichte**

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,\, y,\, z) \;-\; \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,\, y,\, z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,\, y,\, z) \;-\; \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,\, y,\, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y,\, z) \;-\; \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y,\, z) \end{pmatrix}$$

Ebene Strömungen können in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden: n=2

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{f}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\tilde{\boldsymbol{f}}$ erhält man die Rotation: $(0,\, 0,\, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y) \;-\; \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y))^T$. Man nennt daher für $n = 2$ auch

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\, y) \;-\; \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\, y)$$

Bei Flußproblemen = Zirkulation/Wirbeldichte, rot $= 0$: **Wirbelfrei**
Veranschaulichung wie oben: summiere die zum Rand eines kleinen Flächenstücks tangentialen Komponenten.

Für das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ einer Starrkörperrotation um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gilt $\|\mathrm{rot}\, v\| = 2\omega$, und $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}$ ist parallel zur Drehachse.

Später: Potentiale, Arbeitsintegrale, etc.

Beispiel a) (zu P1)

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = (xy^2 + xz^2,\ yx^2 + yz^2,\ zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3$$

$$\text{div } \boldsymbol{v}(x,y,z) =$$

$$\text{rot } \boldsymbol{v}(x,y,z) \ = \ \begin{pmatrix} (v_3)_y \ - \ (v_2)_z \\ (v_1)_z \ - \ (v_3)_x \\ (v_2)_x \ - \ (v_1)_y \end{pmatrix} \ =$$

Beispiel b) (zu P1) $\boldsymbol{u}(x,y) = (-y,x)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2$

$$\text{div } u(x,y) = \ (u_1)_x + (u_2)_y = \ (-y)_x + (x)_y = 0$$

$$\text{rot } u(x,y) = \ (u_2)_x - (u_1)_y = \ (x)_x - (-y)_y \ = \ 1 - (-1) = 2\,.$$

Beispiel c) (zu P1 und P3)
Zeige: Für $\mathcal{C}^3$-Funktion gilt $\operatorname{div}(\text{rot}\,\boldsymbol{f})(x,y,z) = 0$

$$\operatorname{div}(\text{rot}\,\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \operatorname{div}\begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix}$$