Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani
Wise 24/25
27.01.2025

Klausurberatung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres partielles ableiten,
- $\nabla f = \textbf{grad}\, f^T$ = Vektor der ersten Ableitungen,
- $\nabla^2 \boldsymbol{f} = H\boldsymbol{f}$ = Matrix der zweiten Ableitungen,
- Verlauf und Ableitung elementarer Funktionen
- Eigenwerte berechnen, bzw. deren Vorzeichen,
- **rot** $\boldsymbol{f}$, div $\boldsymbol{f}$, Rotation, Divergenz,
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Jacobi-Matrix
- Einfache Integration, sehr einfache Substitutionen ($\cos(k\phi)$ etc.), partielle Integration.

$$\int \cos(k\varphi)\, d\varphi = \frac{\sin(k\varphi)}{k} + C$$

$$\int \sin(k\varphi)\, d\varphi = -\frac{\cos(k\varphi)}{\varphi} + c$$

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$

z.B.

$\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin^3(\alpha)$

$= \sin(\alpha)\left(\underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{1}\right) = \sin(\alpha)$

Additionstheoreme für $\cos^2(\alpha)$, $\sin^2(\alpha)$, $\underbrace{\cos(\alpha)\sin(\alpha)}_{\frac{\sin(2\alpha)}{2}}$, $\cos^3(\alpha)$, $\sin^3(\alpha)$ etc. werden, **falls nötig** angegeben.

$\frac{\cos(2\alpha)+1}{2}$

etc.

Abkürzungen

wz: Werkzeug

xxx: Wichtiger Typ von Aufgabe, kann viele Punkte bringen/kosten.

x: Kann vorkommen, aber meist nur als kleine Aufgabe für wenig Punkte.

$\emptyset$: Nicht geeignet als Klausuraufgabe.

Tipps:

- **Achten Sie auf die Anzahl der Punkte!**

  Ein Aufgabenteil mit 1-2 Punkten darf Sie nicht 15 Minuten beschäftigen.

  Ein Aufgabenteil mit ≥ 4 Punkten kann nicht mit einer Zeile erledigt sein.

- Wenn Sie am Ende einer Rechnung (wo es zum Bsp. nur um die Klärung des Vorzeichens oder den Wert eines Integrals geht) **krumme Zahlen**, wie etwa

$$\overbrace{26 \pm \underbrace{\sqrt{26 - \frac{18}{2}}}_{< \sqrt{26} < 26}}^{> 0}$$

  erhalten, ist das in Ordnung. Nicht aber am Anfang einer längeren Rechnung. In dem Fall überprüfen Sie ihre Rechnung, vielleicht sollte es doch

$$25 \pm \sqrt{25 - \frac{18}{2}} = 25 \pm \sqrt{16} \qquad \text{lauten.}$$

Top Themen der letzten Klausuren
(In der Reihenfolge der Bearbeitung im Semester)

- **Taylorpolynom mit Fehlerabschätzung**

  Passende Aufgaben: Blätter 3: P1, H1, H2

- **Min/Max ohne Nebenbedingung**

  – Kandidaten: **grad** $f = \mathbf{0}$
  – Klassifikation: Eigenwerte Hessematrix Hf

  Passende Aufgaben: Blätter 4: P1

- **Min/Max mit Nebenbedingung**
  - Zulässigkeit, Regularitätsbedingung
  - Lagrangefunktion F aufstellen
  - Stationäre Punkte: **grad** $F = 0$
  - Hessematrix $\boldsymbol{H}\, F$ berechnen
  - Klassifikation:
    * Kompaktheit der zulässigen Menge
    * bzw. Definitheit der Hessematrix prüfen.
    * Eventuell Tangentialraum berechnen, Definitheit der Hessematrix darauf testen.

  Passende Aufgaben: Blätter 5: P1, P2, H1

- **Bereichsintegrale**
  - direkt berechnen
  - Transformationssatz (Polar–, Zylinder–, Kugelkoordinaten)
  - Volumen, Masse, Trägheitsmoment, Fluss (Gauß)

  Passende Aufgaben: Blätter 7: P2, H2, Blätter 6: komplett.

- **Kurvenintegrale**
  - Rotation berechnen
  - Potential berechnen $\longrightarrow$ Kurvenintegral über Potential (Hauptsatz)
  - Kurvenintegral direkt berechnen
  - Sätze von Green (Gauß in der Ebene)

  Passende Aufgaben: Blätter 7: Aufgaben P1, H1

- **Oberflächenintegrale**
  - Parametrisierung
  - Fluss, Satz von Gauß

  Passende Aufgaben: Blätter 7: P2, H2

- **Blätter 1:**

  - P1: Partielle Ableitungen berechnen, **grad**, ∇ , Δ. **(wz)**
  - P2: Mengen im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, Kreise, Ringe, Kugeln, etc.
    Begriffe: beschränkt, abgeschlossen, konvex etc. **(wz)**
  - H1: Ableitungen bis Ordnung 3 berechnen,
    $\nabla-$Operator. Vertauschbarkeitssatz nutzen! **(wz)**
  - H2: Zeige gegebene Funktion löst Wellengleichung **($\emptyset$)**

- **Blätter 2:**
  P1 a: Zeige: $\textbf{rot}\,\textbf{grad}(\boldsymbol{f}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathcal{C}^2$ Funktionen f
  Gradientenfelder sind stets rotations frei. **(wz)**

  P1 b: Entscheide welche gegebenen Vektorfelder kein Gradientenfeld sein können. **(x,wz)**

  P2: **grad** f berechnen, **(wz)**

  Höhenlinien und Gradientenrichtung skizzieren, **($\emptyset$)**
  P2 d: Vermutung Höhenlinie senkrecht auf Gradient. **($\emptyset$)**

  H1: Jacobi-Matrizen und deren Determinanten berechnen. **(wz)**

  H2: : Niveau-Flächen, Richtungsableitungen,
  An- /Abstiegsrichtung. **(wz)**

- **Blätter 3:**

  – P1a,b: Taylorpolynom T_2 in $\mathbb{R}^2$ mit Fehlerabschätzung **(xxx)**

  – P1c: Taylorpolynom T_3 in $\mathbb{R}^2$ mit Fehlerabschätzung **($\emptyset$)**

  – P2: Mengen beschreiben mittels Polar- bzw. Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten. **(wz)**

  – H1: Taylorpolynom 2. Grades, $\mathbb{R}^3, \boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ mit Fehlerabschätzung. (In der Kombi zu aufwendig, aber gutes Training für die Klausur)

  – H2: Taylor 2. Grades, $\mathbb{R}^2$ über Sinus- / Cosinus- / Exponentialreihe mit Fehlerabschätzung. **(xxx)**

- **Blätter 4:**

  – P1: Extrema ohne Nebenbedingungen gesucht.
  Stationäre Punkte finden
  und klassifizieren: Min/Max/Sattel? **(xxx)**

  – P2a,b: Implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$
  mit T_1 Berechnung. **(x)**

  $g(x, y) \overset{!}{=} 0$

  $g(x_0, y_0) = 0$

  $g_y(x_0, y_0) = 0$

  $g(x, y) = 0 \iff y = f(x)$ nahe (x_0, y_0)

  P2c: implizites differenzieren. . **(∅)**

  $T_1(x) = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + f'(x_0)(x - x_0)$, $f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

  – H1: Kurve im $\mathbb{R}^2$. Singuläre Punkte + Klassifikation,
  Punkte mit horizontaler/vertikaler Tangente. **(x)**

  – H2a: Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$
  mit Berechnung von T_1 **(x)**
  und T_2 **(∅)**

  H2b: Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^3$. **(x)**

- **Blätter 5:**

  - P1: Min/Max unter Nebenbedingung $g(x,y) \le 0$ im $\mathbb{R}^2$, **(xxx)**

    - P1a: Extrema im Inneren $g(x,y) < 0$,
    - P1b: Extrema auf dem Rand $g(x,y) = 0$,
    - P1c: Insgesamt (Kompaktheit!)

  - P2: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$. **(xxx)**

    Kandidat gegeben.
    RB, Zulässigkeit und notwendige Bedingung prüfen. $\nabla F = \vec{0}$

    Klassifikation: Hesse-Matrix auf Tangentialraum prüfen.

- H1: Min/Max unter zwei Nebenbedingungen im $\mathbb{R}^3$. **(zu aufwendig)**

  Klassifikation: Kompaktheit nutzen.

- H2: Newton Verfahren. **($\emptyset$)**

- **Blatt 6:** **(Komplett xxx)**
  - P1: Bereichsintegrale, Divergenz , Transformationssatz, Polarkoordinaten.
  - P2: Bereichsintegral, Zylinderkoordinaten,
    Masse, Trägheitsmoment.
  - H1a: Bereichsintegral, kartesisch, Schwerpunkt
  - H1b: Bereichsintegral, Kugelkoordinaten
  - H2: Bereichsintegral, elliptische Zylinderkoordinaten
    (In der Klausur eher Standard Zylinderkoordinaten statt elliptische)
    Volumen, Masse, Trägheitsmoment.

- **Blatt 7:** **(Komplett xxx)**

  * P1a: Potential berechnen, Kurvenintegrale berechnen,
    Fluss (Green/Gauß in der Ebene)

  * P1b: Kurvenintegral direkt berechnen, Satz von Green

  * P2: Bereichsintegral, Oberflächenintegral, Gauß, Kugelkoordinaten.

  * H1: Rotation, Potential,
    Kurvenintegral direkt und über Potential berechnen.

Übung

  * H2: Bereichsintegral, Oberflächenintegral, Gauß,
    Zylinderkoordinaten
    (In der Klausur eher Körper mit zwei Randflächen statt drei)