

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Potentialberechnung:

Ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt ein **Potential** bzw. eine **Stammfunktion**, falls es eine C^1 -Funktion

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, so dass \mathbf{f} mit dem **Gradientenfeld** von Φ übereinstimmt:

$$\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Integrabilitätsbedingung:

Ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann ein Potential, wenn die folgende Integrabilitätsbedingung für alle $\mathbf{x} \in D$ erfüllt ist:

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T .$$

Für $n = 2, 3$ stimmt diese Bedingung mit $\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ überein.

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Potential Φ gilt:

a)

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{c}(b)) - \Phi(\mathbf{c}(a))$$

für eine beliebige stückweise C^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$.

b) Ein zu \mathbf{f} gehöriges Potential Φ kann berechnet werden durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{c}\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \text{Konstante} .$$

Dabei ist $\mathbf{c}\mathbf{x}$ eine beliebige stückweise C^1 -Kurve in D , die einen festen Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ mit $\mathbf{x} \in D$ verbindet.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung eines Potentials (neben b)) besteht im sukzessiven **'Integrieren'** der Komponenten des Vektorfeldes,

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T .$$

Die Bedingung $\text{grad } \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ im \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} \Phi_x(x, y, z) \\ \Phi_y(x, y, z) \\ \Phi_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Man zeige, dass \mathbf{f} ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

Der \mathbb{R}^3 ist einfach zusammenhängend und die Integrierbarkeitsbedingung ist erfüllt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3y^3z^4 - 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 - 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 - 12x^2y^3z^5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Daher besitzt $\mathbf{f}(x, y, z)$ ein Potential $v(x, y, z)$,

d.h. es gilt $\mathbf{f} = \operatorname{grad} v = (v_x, v_y, v_z)$.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von \mathbf{f} :

$$v_x(x, y, z) = 3x^2y^4z^5 + 1$$

$$\Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + c(y, z)$$

$$\Rightarrow v_y(x, y, z) = 4x^3y^3z^5 + c_y(y, z) \stackrel{!}{=} 4x^3y^3z^5 + 2y$$

$$\Rightarrow c_y(y, z) = 2y \quad \Rightarrow \quad c(y, z) = y^2 + k(z)$$

$$\Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + k(z)$$

$$\Rightarrow v_z(x, y, z) = 5x^3y^4z^4 + k'(z) \stackrel{!}{=} 5x^3y^4z^4 + 3z^2$$

$$\Rightarrow k'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad k(z) = z^3 + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v(x, y, z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$$

- c) Man berechne ein Potential mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale:

Wahl der Kurve \mathbf{k} :

direkte Verbindungslinie von $(0, 0, 0)$ zu (x, y, z) , d.h.

$$\mathbf{k}(t) = t(x, y, z)^T \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= \int_{\mathbf{k}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + K = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{k}(t)) \dot{\mathbf{k}}(t) dt + K \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3(tx)^2(ty)^4(tz)^5 + 1 \\ 4(tx)^3(ty)^3(tz)^5 + 2ty \\ 5(tx)^3(ty)^4(tz)^4 + 3(tz)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K \\ &= \int_0^1 12t^{11}x^3y^4z^5 + x + 2ty^2 + 3t^2z^3 dt + K \\ &= t^{12}x^3y^4z^5 + xt + t^2y^2 + t^3z^3 \Big|_0^1 + K \\ &= x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K \end{aligned}$$

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ ergibt sich nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt = v(\mathbf{c}(\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\ &= v(-1, 0, -1) - v(1, 0, 1) = -1 - 1 - (1 + 1) = -4 \end{aligned}$$

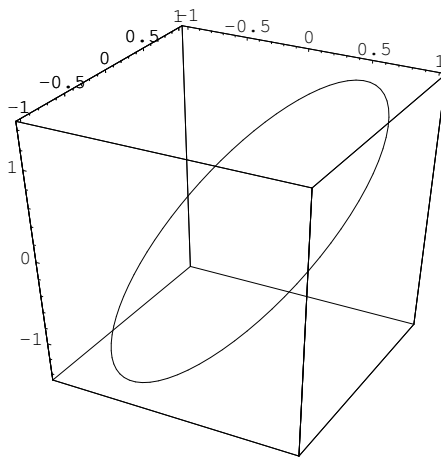


Bild 25 Kurve \mathbf{c} für $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \dot{\mathbf{c}}(t) dt = v(\mathbf{c}(2\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\ &= v(1, 0, 1) - v(1, 0, 1) = 0 \quad (\text{geschlossene Kurve}) \end{aligned}$$

Integralsatz von Green:

Gegeben sei ein C^1 -Vektorfeld

$$\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und eine kompakte Menge $D \subset G$, die bzgl. beider Koordinatenrichtungen als Normalbereich darstellbar sei. Dann gilt:

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial D} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

Dabei muss der Rand ∂D in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

Aufgabe 26:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$
eingeschlossene Gebiet E .

Lösung:

Die Ellipse E kann durch kartesische

$$E = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{1 - (x/2)^2} \leq y \leq \sqrt{1 - (x/2)^2} \right\},$$

oder Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix} \Rightarrow \det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi) = 2r$$

beschrieben werden

$$Q = \left\{ (r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\} \quad \text{mit} \quad \Phi(Q) = E$$

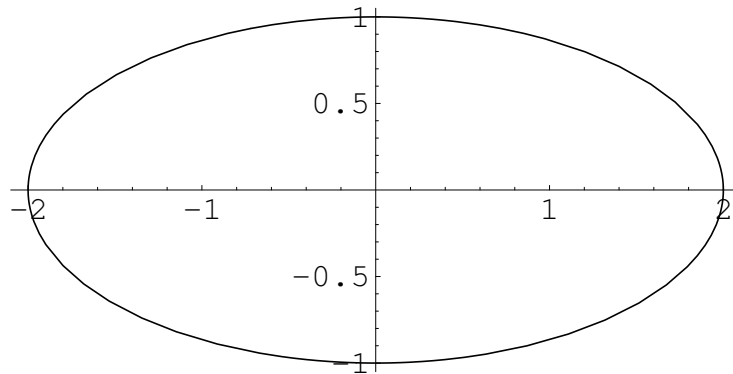


Bild 26: Ellipse E

Parametrisierung des Ellipsenrandes ∂E durch:

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(\varphi)), \dot{\mathbf{c}}(\varphi) \rangle d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \cos \varphi \sin \varphi - 2 \sin \varphi \\ 4 \cos \varphi + 4 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} 4 + 8 \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = 4\varphi + \frac{8}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_E \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_E (2x + 4y^2)_x - (-xy - 2y)_y d(x, y) \\
 &= \int_E 4 + x d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + 2r \cos \varphi) 2r d\varphi dr \\
 &= 8 \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi + 4 \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \\
 &= 8\pi r^2 \Big|_0^1 + \frac{4r^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
 \end{aligned}$$

Integralsatz von Green: $\oint_{\partial E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 8\pi = \int_E \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Flächen im \mathbb{R}^3 :

Gegeben seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ eine C^1 -Abbildung

$$\mathbf{p} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2) \\ y(u_1, u_2) \\ z(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2}$ linear unabhängig für alle $\mathbf{u} \in G$, dann heißt

a) **Fläche** bzw. **Flächenstück** im \mathbb{R}^3

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in G\} = \mathbf{p}(G)$$

b) \mathbf{p} **Parametrisierung** von F ,

c) G **Parameterbereich** von F ,

d) **Tangentialebene** im Punkt $\mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$ an F mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{T}_F(\lambda, \mu) = \mathbf{p}(\mathbf{u}^0) + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_1} + \mu \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_2}$$

e) **Normalenvektor** zu F im Punkt $\mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$,

$$\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u_2}$$

f) **Normaleneinheitsvektor** zu F :

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) := \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\|} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2}$$

g) **Oberflächenelement**: $do := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|$

h) **Flächeninhalt:**

$$\int_{\mathbf{p}(G)} do := \int_G \left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}$$

Oberflächenintegrale: für die Fläche $F = \mathbf{p}(D)$:

a) **Oberflächenintegral 1. Art** für die stetige Funktion
 $f : F \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_F f(\mathbf{x}) do := \int_D f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}.$$

b) **Oberflächenintegral 2. Art** für das stetige Vektorfeld
 $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) do &:= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle do \\ &= \int_D \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u} \\ &= \int_D \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung dar, so kann das Oberflächenintegral

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) do$$

als **Fluss** von \mathbf{f} durch die Fläche F interpretiert werden, gemessen in Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit in Richtung der verwendeten Normalen.

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq x \leq 1, z = 1 - x^2\} .$$

a) Man zeichne N ,

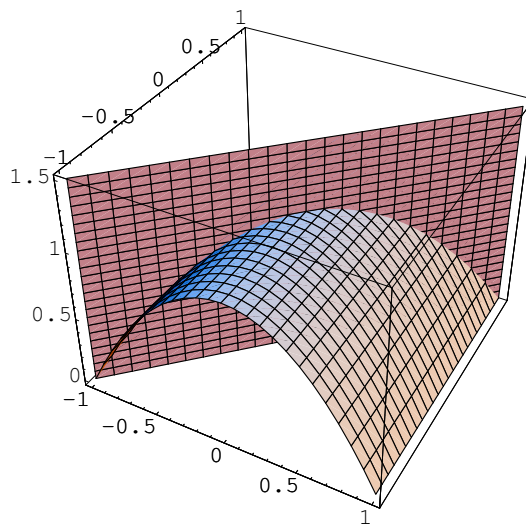


Bild 27: parabolische Zylinderteilfläche N

b) Man parametrisiere N :

Die Fläche N kann als Funktionsgraph interpretiert werden, über dem Dreieck

$$D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, x]\}$$

$$\mathbf{p} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(x, y) = (x, y, 1 - x^2)^T .$$

c) Man berechne den Flächeninhalt von N .

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_N do &= \int_{\mathbf{p}(D)} do = \int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \right\| d(x, y) \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^x \sqrt{1 + (2x)^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + (2x)^2} \Big|_{-1}^x dx \\ &= \int_{-1}^1 x \sqrt{1 + (2x)^2} + \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t \right) \Big|_0^2 \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} 2 = 2.957985715 \dots \end{aligned}$$

Gaußscher Integralsatz:

Für das C^1 -Vektorfeld

$$\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und den kompakten messbaren Standardbereich $S \subset G$, dessen Rand ∂S aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht, gilt:

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}.$$

Dabei muss bei der Berechnung des Oberflächenintegrals der geschlossenen Fläche ∂S , deshalb wird die Schreibweise $\oint_{\partial S}$ verwendet, der Normalenvektor $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u_2}$ bzgl. S nach außen zeigen.

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung dar, so kann das Oberflächenintegral

$$\oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}$$

als Flussbilanz durch das Volumens S interpretiert werden. Für

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

in S gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = 0,$$

es fließt also aus S soviel heraus, wie hineinfließt.

Aufgabe 28:

Gegeben seien der Körper

$$K = \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \leq 0 \}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, z^3)^T .$$

a) Man skizziere K .

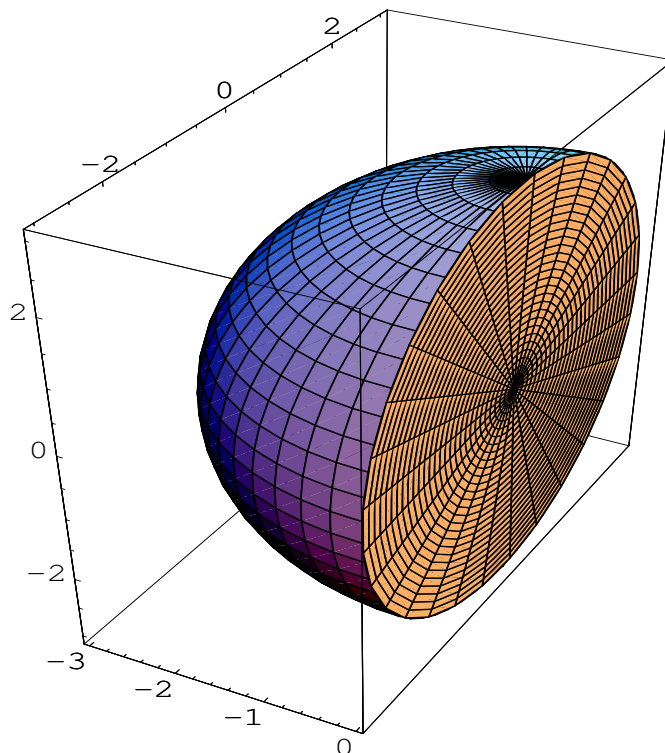


Bild 28: Halbkugel K

- b) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstück S und ein nicht ebenes Flächenstück H

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

Parametrisierung der Kreisseite S :

$$\mathbf{p} : [0, 3] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Halbkugelfläche H :

$$\mathbf{q} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \cos \psi \\ 3 \sin \varphi \cos \psi \\ 3 \sin \psi \end{pmatrix}$$

- c) Man berechne jeweils den Fluss von \mathbf{f} durch die beiden Randflächenstücke S und H .

Fluss durch S , mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_S \mathbf{f} d\sigma = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ 0 \\ r^3 \sin^3 \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos \varphi d\varphi dr = 0$$

Fluss durch H , mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 \sin \varphi \cos \psi & 3 \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ -3 \cos \varphi \sin \psi & -3 \sin \varphi \sin \psi & 3 \cos \psi \end{vmatrix} = 9 \cos \psi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$\int_H \mathbf{f} d\sigma = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9 \cos \psi \left\langle \begin{pmatrix} 3 \sin \varphi \cos \psi \\ -3 \cos \varphi \cos \psi \\ 27 \sin^3 \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 243 \cos \psi \sin^4 \psi d\psi d\varphi$$

$$= 243\pi \frac{\sin^5 \psi}{5} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5}$$

d) Man berechne das Volumenintegral

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z).$$

Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{f} d(x, y, z) = \int_S \mathbf{f} d\sigma + \int_H \mathbf{f} d\sigma = \frac{486\pi}{5}$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} & \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_K 3z^2 d(x, y, z) \\ &= \int_0^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r^2 \sin^2 \psi \cdot r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^3 r^4 dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos \psi \sin^2 \psi d\psi \\ &= \frac{r^5}{5} \Big|_0^3 \varphi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3 \psi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5} \end{aligned}$$