Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Potentialberechnung:

Ein Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt ein **Potential** bzw. eine **Stammfunktion**, falls es eine C^1-Funktion $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\boldsymbol{f}$ mit dem **Gradientenfeld** von Φ übereinstimmt:

$$\text{grad } \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,.$$

Integrabilitätsbedingung:

Ein C^1-Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann ein Potential, wenn die folgende Integrabilitätsbedingung für alle $\boldsymbol{x} \in D$ erfüllt ist:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^T \;.$$

Für $n = 2, 3$ stimmt diese Bedingung mit rot $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ überein.

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Für ein stetiges Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ mit Potential Φ gilt:

a)
$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \Phi(\mathbf{c}(b)) - \Phi(\mathbf{c}(a))$$

für eine beliebige stückweise C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$.

b) Ein zu $\boldsymbol{f}$ gehöriges Potential Φ kann berechnet werden durch

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{c}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + Konstante \,.$$

Dabei ist $\mathbf{c}_{\boldsymbol{x}}$ eine beliegige stückweise C^1-Kurve in D, die einen festen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ mit $\boldsymbol{x} \in D$ verbindet.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung eines Potentials (neben b)) besteht im sukzessiven **'Integrieren'** der Komponenten des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T \,,$$

unter Verwendung der Bedingung grad $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, also im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} \Phi_x(x,y,z) \\ \Phi_y(x,y,z) \\ \Phi_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} \,.$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$
.

Lösung:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\text{rot}\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3y^3z^4 - 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 - 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 - 12x^2y^3z^5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ ein Potential $v(x,y,z)$, d.h. es gilt $\boldsymbol{f} = \text{grad}\; v = (v_x, v_y, v_z)$.

b) $v_x(x,y,z) = 3x^2y^4z^5 + 1 \quad \Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + c(y,z)$

$\Rightarrow \quad v_y(x,y,z) = 4x^3y^3z^5 + c_y(y,z) \overset{!}{=} 4x^3y^3z^5 + 2y$

$\Rightarrow \quad c_y(y,z) = 2y \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v_z(x,y,z) = 5x^3y^4z^4 + k'(z) \overset{!}{=} 5x^3y^4z^4 + 3z^2$

$\Rightarrow \quad k'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad k(z) = z^3 + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$

c) Wählt man als Kurve $\boldsymbol{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z), d.h. $\boldsymbol{k}(t) = t(x,y,z)^T$, so lässt sich ein Potential v zu $\boldsymbol{f}$ berechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$\begin{aligned}
v(x,y,z) &= \int_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + K \;=\; \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t))\dot{\boldsymbol{k}}(t)\,dt + K \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3(tx)^2(ty)^4(tz)^5+1 \\ 4(tx)^3(ty)^3(tz)^5+2ty \\ 5(tx)^3(ty)^4(tz)^4+3(tz)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K \\
&= \int_0^1 12t^{11}x^3y^4z^5 + x + 2ty^2 + 3t^2z^3\,dt + K \\
&= t^{12}x^3y^4z^5 + xt + t^2y^2 + t^3z^3\Big|_0^1 + K \\
&= x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K
\end{aligned}$$

d) Mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ ergibt sich nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{\pi} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt \;=\; v(\mathbf{c}(\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\
&= v(-1,0,-1) - v(1,0,1) \;=\; -1-1-(1+1) = -4
\end{aligned}$$

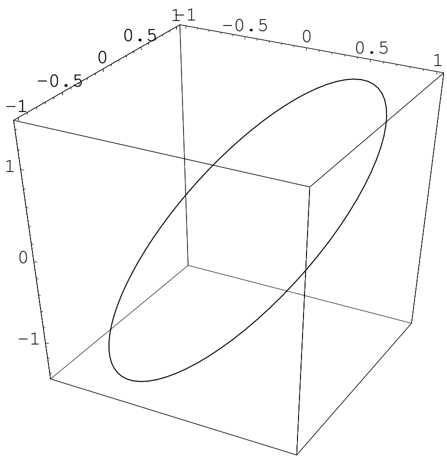

Bild 25 Kurve $\mathbf{c}$ für $T = 2\pi$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt \;=\; v(\mathbf{c}(2\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\
&= v(1,0,1) - v(1,0,1) \;=\; 0 \;\; \text{(geschlossene Kurve)}
\end{aligned}$$

Integralsatz von Green:

Gegeben sei ein C^1-Vektorfeld $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^2$ auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und eine kompakte Menge $D \subset G$, die bzgl. beider Koordinatenrichtungen als Normalbereich darstellbar sei. Dann gilt:

$$\int_D \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \oint_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Dabei muss der Rand ∂D, in der für die Berechnung gewählten Parametrisierung, in mathematisch positiver Richtung, also entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Aufgabe 26:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Lösung:

Die Ellipse E kann durch kartesische oder Polarkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}, \quad \Rightarrow \det \boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi) = 2r$$

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2\,,\ -\sqrt{1-(x/2)^2} \le y \le \sqrt{1-(x/2)^2}\right\}, \\ Q &= \left\{(r,\varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\right\} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Phi}(Q) = E \end{aligned}$$

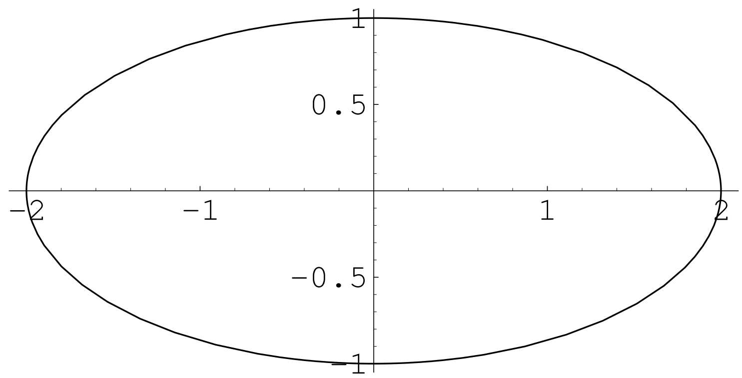

Bild 26: Ellipse E

Parametrisierung des Ellipsenrandes ∂E durch:

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(\varphi)), \dot{\mathbf{c}}(\varphi) > d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi \\ 4\cos\varphi + 4\sin^2\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos\varphi\sin^2\varphi + 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi + 4\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 4 + 8\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi = 4\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_E \text{rot } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_E (2x + 4y^2)_x - (-xy - 2y)_y\, d(x,y) \\
&= \int_E 4 + x\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + 2r\cos\varphi) 2r\, d\varphi dr \\
&= 8 \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi + 4 \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \\
&= 8\pi r^2 \Big|_0^1 + \frac{4r^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

Integralsatz von Green: $\displaystyle \oint_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 8\pi = \int_E \text{rot } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$

Flächen im $\mathbb{R}^3$:

Gegeben seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ eine C^1-Abbildung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} : G &\to \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\mapsto \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} x(u_1,u_2) \\ y(u_1,u_2) \\ z(u_1,u_2) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Sind die Vektoren $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1}$ und $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2}$ linear unabhängig für alle $\boldsymbol{u} \in G$, dann heißt

a) $F := \left\{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{u} \in G\right\} = \boldsymbol{p}(G)$
Fläche bzw. **Flächenstück** im $\mathbb{R}^3$.

b) $\boldsymbol{p}$ **Parametrisierung** von F,

c) G **Parameterbereich** von F bzgl. $\boldsymbol{p}$,

d) $\boldsymbol{T}_F(\lambda,\mu) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0) + \lambda \dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)}{\partial u_1} + \mu \dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)}{\partial u_2}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **Tangentialebene** im Punkt $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)$ an F,

e) $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)}{\partial u_2}$ **Normalenvektor** zu F im Punkt $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^0)$,

f) $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})) := \dfrac{\frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} \right\|}$ **Normaleneinheitsvektor** zu F,

g) $do := \left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2} \right\|$ **Oberflächenelement** und

h) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{p}(G)} do := \int_G \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} \right\| d\boldsymbol{u}$ **Flächeninhalt** von $\boldsymbol{p}(G)$.

Oberflächenintegrale:

Für die Fläche F, die mit dem kompakten, messbaren und zusammenhängenden Menge D und der C^1-Abbildung $\boldsymbol{p}$ parametrisiert wird, d.h. $F = \boldsymbol{p}(D)$, werden folgende Oberflächenintegrale definiert:

a) **Oberflächenintegral 1. Art** für die stetige Funktion $f : F \to \mathbb{R}$

$$\int_F f(\boldsymbol{x})\,do := \int_D f(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} \right\| d\boldsymbol{u}\,.$$

b) **Oberflächenintegral 2. Art** für das stetige Vektorfeld $\boldsymbol{f} : F \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_F \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,do &:= \int_F \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \rangle \,do \\ &= \int_D \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \rangle \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u_2} \right\| d\boldsymbol{u} \\ &= \int_D \left\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})), \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} \right\rangle d\boldsymbol{u}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung dar, so kann das Oberflächenintegral $\int_F \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,do$ als **Fluss** von $\boldsymbol{f}$ durch die Fläche F interpretiert werden, gemessen in Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit in Richtung der verwendeten Normalen.

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le y \le x \le 1\,,\ z = 1 - x^2\ \right\}\ .$$

a) Man zeichne N,

b) parametrisiere N und

c) berechne den Flächeninhalt von N.

Lösung:

a)

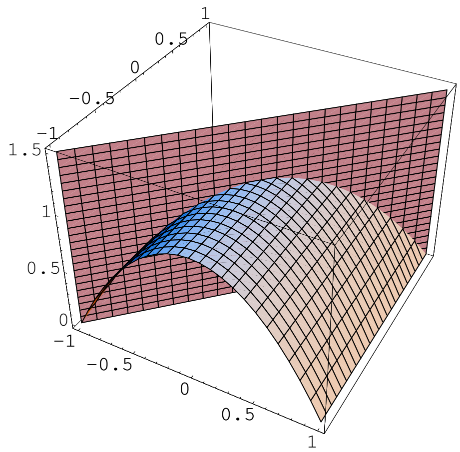

Bild 27: parabolische Zylinderteilfläche N

b) Die Fläche N kann als Funktionsgraph interpretiert werden, über dem Dreieck $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1]\,,\ y \in [-1,x]\,\}$

$$\boldsymbol{p} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{p}(x,y) = (x, y, 1-x^2)^T\ .$$

c)

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_N do &= \int\limits_{\boldsymbol{p}(D)} do = \int\limits_D \left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\right\| d(x,y) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{x} \sqrt{1+(2x)^2}\, dydx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} y\sqrt{1+(2x)^2}\,\Big|_{-1}^{x}\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1+(2x)^2} + \sqrt{1+(2x)^2}\, dx \\
&= 2\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t\right)\Big|_0^2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 2 = 2.957985715\ldots
\end{aligned}$$

Gaußscher Integralsatz:

Für das C^1-Vektorfeld $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^3$ auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und den kompakten messbaren Standardbereich $S \subset G$, dessen Rand ∂S aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht, gilt:

$$\int_S \mathrm{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, do\,.$$

Dabei muss bei der Berechnung des Oberflächenintegrals der geschlossenen Fläche ∂S, deshalb wird die Schreibweise $\displaystyle\oint_{\partial S}$ verwendet, der Normalenvektor $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{u})}{\partial u_2}$ bzgl. S nach außen zeigen.

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung dar, so kann das Oberflächenintegral $\displaystyle\oint_{\partial S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, do$ als Flussbilanz durch das Volumens S interpretiert werden. Für $\mathrm{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$ in S gilt nach dem Gaußschen Integralsatz $\displaystyle\oint_{\partial S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, do = 0$, es fließt also aus S soviel heraus, wie hineinfließt.

Aufgabe 28:

Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 9\,,\; x \le 0 \;\right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(y, -x, z^3\right)^T \;.$$

a) Man skizziere K.

b) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstücke S und ein nicht ebenes Flächenstück H.

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke S und H.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Lösung:

a)

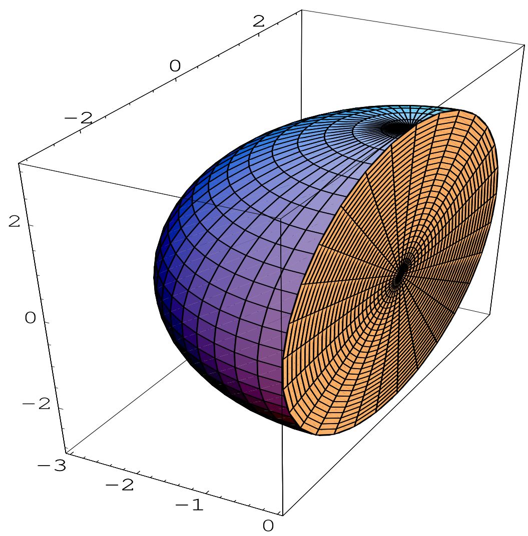

Bild 28: Halbkugel K

b) Parametrisierung der Kreisseite S: $\boldsymbol{p} : [0,3] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Halbkugelfläche H:

$\boldsymbol{q} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi\cos\psi \\ 3\sin\varphi\cos\psi \\ 3\sin\psi \end{pmatrix}$$

c) Fluss durch S, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_S \boldsymbol{f}\, do = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \\ r^3 \sin^3\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos\varphi d\varphi dr = 0$$

Fluss durch H, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -3\sin\varphi\cos\psi & 3\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -3\cos\varphi\sin\psi & -3\sin\varphi\sin\psi & 3\cos\psi \end{vmatrix} = 9\cos\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\int_H \boldsymbol{f}\, do = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9\cos\psi \left\langle \begin{pmatrix} 3\sin\varphi\cos\psi \\ -3\cos\varphi\cos\psi \\ 27\sin^3\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 243\cos\psi \sin^4\psi d\psi d\varphi = 243\pi \left. \frac{\sin^5\psi}{5} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5}$$

d) Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z) = \int_S \boldsymbol{f}\, do + \int_H \boldsymbol{f}\, do = \frac{486\pi}{5}$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten:

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_K 3z^2\, d(x,y,z) = \int_0^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r^2 \sin^2\psi \cdot r^2 \cos\psi\, d\psi d\varphi dr$$

$$= \int_0^3 r^4 dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos\psi \sin^2\psi\, d\psi = \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^3 \varphi\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3\psi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5}$$