

# Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

## Das Riemann-Integral:

Exemplarische Darstellung für eine **beschränkte Funktion** auf einem **Rechteck**

$$f : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{:=Q} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y).$$

**Zerlegung**  $Z$  des Rechtecks  $Q$  durch

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

in **Teilrechtecke**

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

mit **Flächeninhalt**  $\text{Vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$ .

**Riemannsche Untersumme:**

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} \inf_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x, y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

**Riemannsche Obersumme:**

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} \sup_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x, y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

## Riemannsches Integral:

(definiert nur für  $\sup_Z U_f(Z) = \inf_Z O_f(Z)$ )

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) := \sup_Z U_f(Z) \quad \left( = \inf_Z O_f(Z) \right) .$$

### Satz: (von Fubini)

Existieren

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

für alle  $x \in [a, b]$  und

$$G(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

für alle  $y \in [c, d]$ , dann gilt

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

## Aufgabe 21:

a) Mit  $Q := [0, 2] \times [0, 1]$  berechne man für die Funktion

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2 - x$$

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung  $Z$  von  $Q$

$$Q_{i,j} = \left[ \frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n} \right] \times \left[ \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \inf_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 2 - \frac{2i}{n} \right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 1 - \frac{i}{n} \right) \right) \\ &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n (n - i) \\ &= \frac{4}{n^2} \left( n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{2(n^2 - n)}{n^2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \sup_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( 2 - \frac{2(i-1)}{n} \right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

(ii) Integral von  $f$  über  $Q$  nach dem Satz von Fubini.

$$\begin{aligned} \int_Q f(x,y) d(x,y) &= \int_0^1 \left( \int_0^2 2 - x dx \right) dy \\ &= \int_0^1 2x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 dy \\ &= \int_0^1 2 dy \\ &= 2y \Big|_0^1 = 2 \end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = U_f(Z) \leq \int_Q f(x,y) d(x,y) = 2$$

$$\int_Q f(x,y) d(x,y) = 2 \leq O_f(Z) = 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) .$$

b) Man berechne die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x+y) \, dx \, dy &= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x+y) \Big|_0^{\pi} \, dy \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\pi+y) - \sin y \, dy \\ &= (\cos y - \cos(\pi+y)) \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad R = [1, 2] \times [1, 4],$$

$$\begin{aligned} \int_R 9x^2 \sqrt{y} \, d(x, y) &= \int_1^2 \int_1^4 9x^2 \sqrt{y} \, dy \, dx \\ &= \int_1^2 3x^2 \left( \int_1^4 3\sqrt{y} \, dy \right) \, dx \\ &= \left( \int_1^2 3x^2 \, dx \right) \cdot \left( \int_1^4 3\sqrt{y} \, dy \right) \\ &= \left( x^3 \Big|_1^2 \right) \cdot \left( 2y^{3/2} \Big|_1^4 \right) = 98 \end{aligned}$$

(iii)  $Q = [1, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1]$ .

$$\begin{aligned} & \int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2} d(x, y, z) \\ &= \int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2} dz dy dx \\ &= \int_1^2 \int_0^1 \left( \cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2} \right) \Big|_{-1}^1 dy dx \\ &= \int_1^2 \int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2} dy dx = \int_1^2 -\frac{4}{2x+y} \Big|_0^1 dx \\ &= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1} + \frac{2}{x} dx = (-2 \ln |2x+1| + 2 \ln |x|) \Big|_1^2 \\ &= -2 \ln 5 + 2 \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln \frac{36}{25} \end{aligned}$$

## Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$ :

Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls

- a) stetige Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass  $D$  die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

- b) stetige Funktionen  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass  $D$  die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d \} .$$

## Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$ :

Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^3$  wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls stetige Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\xi_1, \xi_2$  existieren, so dass  $D$  die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \xi_1(x, y) \leq z \leq \xi_2(x, y) \} .$$

Wie in der Darstellung im  $\mathbb{R}^2$  können in der Darstellung  $x, y$  und  $z$  beliebig vertauscht sein.

### *Bemerkung:*

Häufig lassen sich Mengen  $D$ , über die beispielsweise integriert werden soll, nicht durch einen einzigen Normalbereich darstellen, sondern nur durch Vereinigung mehrerer Normalbereiche.



## Aufgabe 22:

- a) (i) Man zeichne das Dreieck  $D$  mit den Eckpunkten  $P_1 = (-1, 1)$ ,  $P_2 = (0, 0)$  und  $P_3 = (2, 2)$  und stelle es als Normalbereich dar.

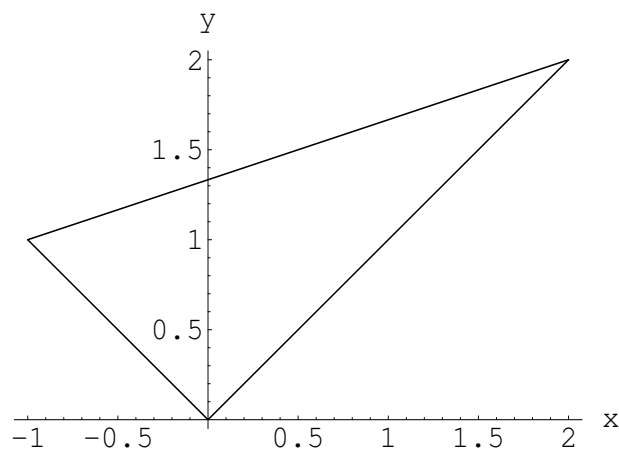
Die Geraden durch folgende Punkte lauten:

$$P_1, P_3: g(x) = (x + 4)/3,$$

$$P_1, P_2: f_1(x) = -x,$$

$$P_2, P_3: f_2(x) = x.$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, |x| \leq y \leq (x + 4)/3 \right\}$$



**Bild 22 a)** Dreieck  $D$

(ii) Man berechne  $\int_D 18y \, d(x, y)$

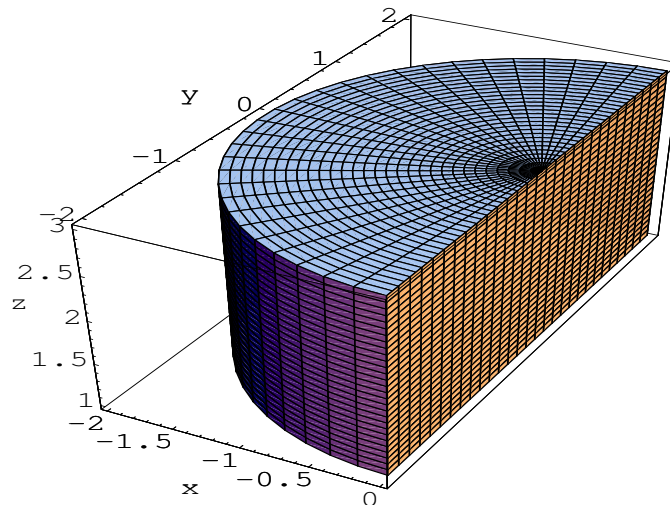
$$\begin{aligned}\int_D 18y \, d(x, y) &= \int_{-1}^2 \int_{|x|}^{(x+4)/3} 18y \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^2 9y^2 \Big|_{|x|}^{(x+4)/3} \, dx \\ &= \int_{-1}^2 (x+4)^2 - 9x^2 \, dx \\ &= \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3 \Big|_{-1}^2 = 36\end{aligned}$$

b) (i) Man zeichne den durch  $x \leq 0$ ,  $z \geq 1$ ,  $z \leq 3$  und  $x^2 + y^2 \leq 4$  beschriebenen Bereich  $Z$  und stelle ihn als Normalbereich dar.

Kreis :  $x^2 + y^2 = 4$

Zylinder:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $1 \leq z \leq 3$

halber Zylinder:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $1 \leq z \leq 3$ ,  $x \leq 0$



**Bild 22 b)** halber Zylinder  $Z$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq x \leq 0, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, 1 \leq z \leq 3 \right\}$$

(ii) Man berechne

$$\begin{aligned} \int_Z 3x \, d(x, y, z) &= \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^3 3x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_1^3 dz \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{-2}^0 3xy \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-2}^0 6x \sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= -4 (4-x^2)^{3/2} \Big|_{-2}^0 = -32 \end{aligned}$$

## Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment:

Gegeben sei ein Körper  $K \subset \mathbb{R}^3$  mit der nichtnegativen stetigen Massendichtefunktion  $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die **Masse**  $M$  des Körpers  $K$  berechnet sich durch

$$M = \int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) .$$

Der **Schwerpunkt**  $\mathbf{x}_s$  des Körpers  $K$  ist gegeben durch

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \int_K \rho(x, y, z) \cdot x d(x, y, z) \\ \int_K \rho(x, y, z) \cdot y d(x, y, z) \\ \int_K \rho(x, y, z) \cdot z d(x, y, z) \end{pmatrix} .$$

Das **Trägheitsmoment**  $\Theta_A$  eines Körpers  $K$  bezüglich einer Drehachse  $A$  berechnet sich durch

$$\Theta_A = \int_K \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) d(x, y, z) .$$

Dabei gibt  $r(x, y, z)$  den Abstand des Punktes  $(x, y, z)^T \in K$  zu  $A$  an.

### Steinerscher Satz:

Ist  $S$  eine zu  $A$  parallele Achse, die durch den Schwerpunkt  $\mathbf{x}_s$  des Körpers  $K$  verläuft,  $d$  der Abstand der Achse  $A$  von  $\mathbf{x}_s$  und  $M$  die Masse von  $K$ , so gilt bei konstanter Dichte  $\rho$

$$\Theta_A = Md^2 + \Theta_S .$$

## Koordinatentransformationen:

a) **Polarkoordinaten:**  $0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi)) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad a \leq z \leq b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi, z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \theta)) = r^2 \cos \theta)$$

## Transformationsatz:

Für stetige Funktionen  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_K f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) \cdot |\det(\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}$$

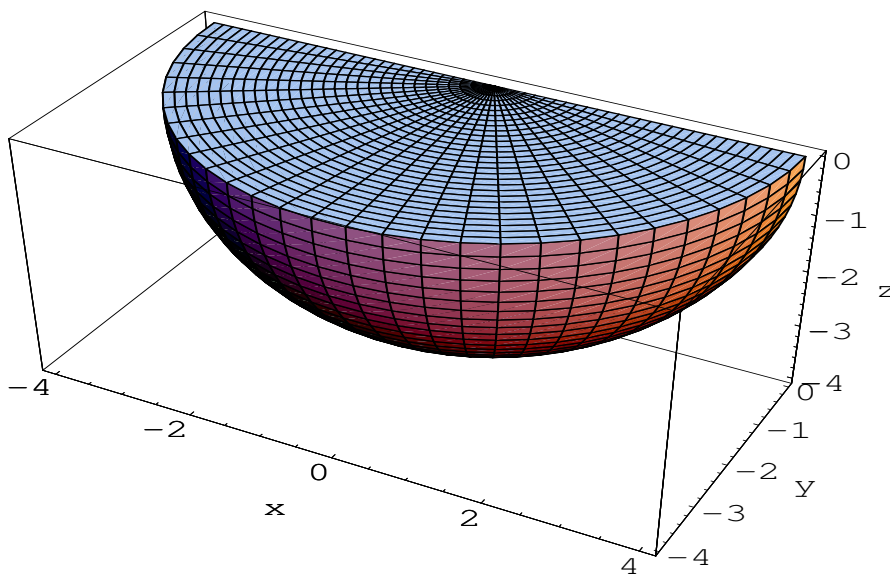
$D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und messbar,  $K = \Phi(D)$  und der

$C^1$ -Koordinatentransformation  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die Transformation  $\Phi$  muss dabei auf  $D^0$  invertierbar sein.

### Aufgabe 23:

- a) Man zeichne die durch  $y \leq 0$ ,  $z \leq 0$  und  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$  gegebene Viertelkugel  $K$  und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$  unter Verwendung von Kugelkoordinaten.



**Bild 23 a)** Viertelkugel  $K$

Kugelkoordinaten für  $K$ :

$$0 \leq r \leq 4, \pi \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \theta \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta),$$

$$\det \mathbf{J}\mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos(\theta)$$

Berechnung der Masse  $M$  in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes

mit  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$  :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_K x^2 + y^2 + z^2 + 1 \, d(x, y, z) \\
 &= \int_0^4 \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^4 \int_{\pi}^{2\pi} r^4 + r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^4 \pi(r^4 + r^2) \, dr \\
 &= \frac{(3 \cdot r^5 + 5 \cdot r^3)\pi}{15} \Big|_0^4 = \frac{3392\pi}{15}
 \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten  $(x_s, y_s, z_s)$ :

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)x \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_{\pi}^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \cos(\varphi) \cos(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_{\pi}^{2\pi} (r^5 + r^3) \cos(\varphi) \frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \Big|_{-\pi/2}^0 \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{\pi}{4M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \sin(\varphi) \Big|_{\pi}^{2\pi} \, dr = 0
 \end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)y \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \sin(\varphi) \cos(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5 + r^3) \sin(\varphi) \frac{\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \Big|_{-\pi/2}^0 \, d\varphi \, dr \\
 &= -\frac{\pi}{4M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \cos(\varphi) \Big|_\pi^{2\pi} \, dr \\
 &= -\frac{\pi(2 \cdot r^6 + 3 \cdot r^4) \Big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_s &= \frac{1}{M} \int_K (x^2 + y^2 + z^2 + 1)z \, d(x, y, z) \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1)r \sin(\theta) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{1}{M} \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} (r^5 + r^3) \frac{\sin^2(\theta)}{2} \Big|_{-\pi/2}^0 \, d\varphi \, dr \\
 &= -\frac{1}{2M} \int_0^4 (r^5 + r^3) \varphi \Big|_\pi^{2\pi} \, dr \\
 &= -\frac{\pi(2 \cdot r^6 + 3 \cdot r^4) \Big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
 \end{aligned}$$

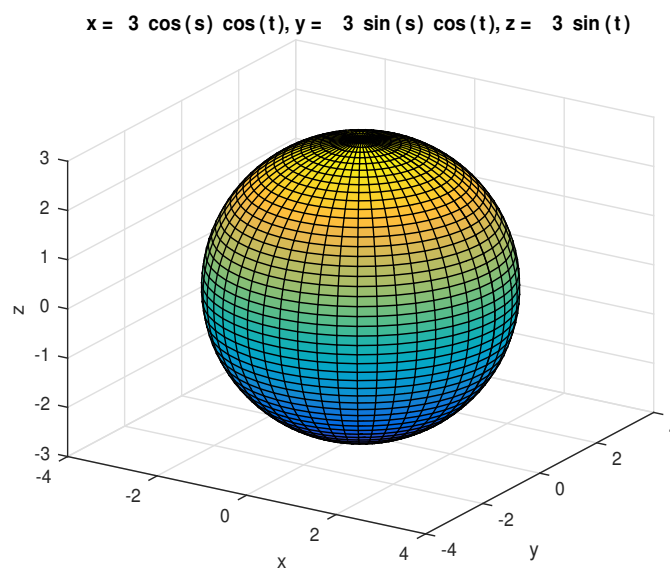


b) Durch  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$  wird eine Kugel  $K$  beschrieben.  
 $K$  habe die konstante Dichte  $\rho$ .

(i) Man zeichne  $K$  unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf', '3*cos(s)*cos(t)',  
'3*sin(s)*cos(t)', '3*sin(t)',  
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```



**Bild 23 b)** Kugel  $K$  mit Radius  $R = 3$

(ii) Berechnung der Masse  $M$  in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_K \rho d(x, y, z) = \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= \rho \int_0^3 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \\
 &= \rho \left( \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^3 (\varphi) \Big|_0^{2\pi} (\sin(\theta)) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \rho \frac{4\pi 3^3}{3} = 36\pi\rho
 \end{aligned}$$

Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse berechnen:

Additionstheorem:  $\cos^3(\theta) = (3 \cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{z\text{-Achse}} &= \int_K \rho(x^2 + y^2) d(x, y, z) \\
 &= \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2 \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta)) \\
 &\hspace{20em} r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= \rho \int_0^3 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta \\
 &= \rho \left( \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^3 (\varphi) \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left( 3 \sin(\theta) + \frac{1}{3} \sin(3\theta) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \rho \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{648\pi\rho}{5}
 \end{aligned}$$

- (iii) Man berechne das Trägheitsmoment von  $K$  bezüglich der zur  $z$ -Achse parallelen Achse  $D$ , die durch den Punkt  $(2, 1, 3)^T$  verläuft.

Da der Schwerpunkt von  $P$  aus Symmetriegründen im Ursprung liegt, gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2 + 1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5}.$$

## Kurvenintegrale 2. Art:

Gegeben sei eine vektorwertige und stetige Funktion

$$\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$$

und eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ ,  $t \mapsto \mathbf{c}(t)$ .

**Definition:**

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt$$

heißt **Kurvenintegral 2. Art**.

Ist die Kurve **geschlossen**, d.h. gilt  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ , so schreibt man auch

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} .$$

### Aufgabe 24:

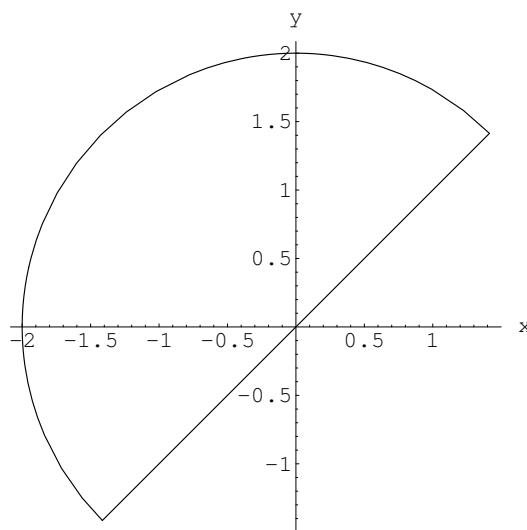
- a) Für das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$  berechne man das Kurvenintegral  $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Dabei ist  $\mathbf{c}$  die mathematisch positive durchlaufene Randkurve  $\partial H$  der Halbkreisfläche  $H : x^2 + y^2 \leq 4$  mit  $x \leq y$ .

Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen:  $\partial H = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ , mit

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$



**Bild 24 a)** Halbkreisrandkurve  $\partial G$

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial H} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_1(t)), \dot{\mathbf{c}}_1(t) \rangle \, dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_2(t)), \dot{\mathbf{c}}_2(t) \rangle \, dt \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix} 4 \cos t \sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &\quad + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} -8 \cos t \sin^2 t + 2 \cos t \, dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 + 1 \, dt \\ &= \left( -\frac{8 \sin^3 t}{3} + 2 \sin t \right) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left( \frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

Mit dem Integralsatz von Green und Polarkoordinaten gilt

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1)_x - (xy)_y = -x$$

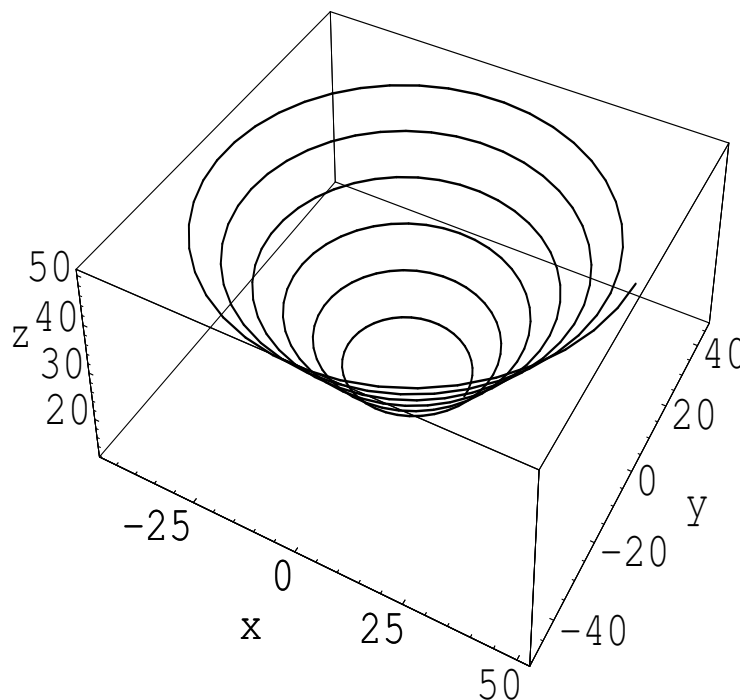
$$\begin{aligned} \oint_{\partial H} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_H \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_H \int_H -x d(x, y) \\ &= - \int_0^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r \cos(\varphi) \cdot r d\varphi dr \\ &= - \int_0^2 r^2 dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos \varphi d\varphi \\ &= - \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^2 \right) \left( \sin \varphi \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \right) \\ &= -\frac{8}{3} \cdot \left( -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

b) Für das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  mit der

Kurve  $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix}$ .



**Bild 24 b)** Kurve  $\mathbf{c}$



$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{4\pi}^{16\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\
 &= \int_{4\pi}^{16\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t \sin t \\ t \cos t \\ \frac{t \sin t + t \cos t}{t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
 &= \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 + \sin t + \cos t \, dt = \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 \, dt \\
 &= \left. \frac{t^3}{3} \right|_{4\pi}^{16\pi} = \frac{\pi^3(16^3 - 4^3)}{3} = 1344\pi^3
 \end{aligned}$$