Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Das Riemann-Integral:

Exemplarische Darstellung für eine **beschränkte Funktion** auf einem **Rechteck**

$$\begin{aligned} f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{:=Q} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \, . \end{aligned}$$

Zerlegung Z des Rechtecks Q durch

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \, , \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

in **Teilrechtecke** $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ mit **Flächeninhalt** $\mathrm{Vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

Riemannsche Untersumme:

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

Riemannsche Obersumme:

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

Riemannsches Integral: (definiert nur für $\sup\limits_Z U_f(Z) = \inf\limits_Z O_f(Z)$)

$$\int\limits_Q f(x,y) \, d(x,y) \; := \; \sup_Z U_f(Z) \quad \left(= \inf_Z O_f(Z) \right) \, .$$

Satz: **(von Fubini)**

Existieren $F(x) := \int_c^d f(x,y) \, dy$ für alle $x \in [a,b]$ und $G(y) := \int_a^b f(x,y) \, dx$ für alle $y \in [c,d]$, dann gilt

$$\int\limits_Q f(x,y) \, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) dy \, .$$

Aufgabe 21:

a) Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]\,,\ i,j = 1,\ldots,n$$

(ii) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

b) Man berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy,$

(ii) $\displaystyle\int_R 9x^2\sqrt{y}\,d(x,y) \quad \text{mit} \quad R = [1,2]\times[1,4],$

(iii) $\displaystyle\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z) \quad \text{mit} \quad Q = [1,2]\times[0,1]\times[-1,1].$

Lösung:

a) (i)

$$\begin{aligned}
U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}\,(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{4}{n^2}\left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{2(n^2-n)}{n^2} \;=\; 2\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) \;=\; 2\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int_Q f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2 - x\,dx\right) dy \;=\; \int_0^1 2x - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 dy \\ &= \int_0^1 2\,dy \;=\; 2y|_0^1 \;=\; 2\end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \;\leq\; \int_Q f(x,y)\,d(x,y) = 2 \;\leq\; O_f(Z) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

b) (i)
$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi \cos(x+y)\,dx\,dy &= \int_\pi^{2\pi} \sin(x+y)|_0^\pi\;dy = \int_\pi^{2\pi} \sin(\pi+y) - \sin y\,dy \\ &= (\cos y - \cos(\pi+y))|_\pi^{2\pi} = 4\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int_R 9x^2\sqrt{y}\,d(x,y) &= \int_1^2\int_1^4 9x^2\sqrt{y}\,dy\,dx = \int_1^2 3x^2\left(\int_1^4 3\sqrt{y}\,dy\right)dx \\ &= \left(\int_1^2 3x^2\,dx\right)\cdot\left(\int_1^4 3\sqrt{y}\,dy\right) \\ &= \left(x^3\big|_1^2\right)\cdot\left(2y^{3/2}\big|_1^4\right) \;=\; 98\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z) &= \int_1^2\int_0^1\int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_1^2\int_0^1 \left(\cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2}\right)\bigg|_{-1}^1 dy\,dx \\ &= \int_1^2\int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2}\,dy\,dx = \int_1^2 -\frac{4}{2x+y}\bigg|_0^1 dx \\ &= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1} + \frac{2}{x}\,dx = (-2\ln|2x+1| + 2\ln|x|)|_1^2 \\ &= -2\ln 5 + 2\ln 2 + 2\ln 3 = \ln\frac{36}{25}\end{aligned}$$

Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$:

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls

a) stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt
$$D = \{ \ (x,y) \mid a \le x \le b \ , \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \ \}$$

b) stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt
$$D = \{ \ (x,y) \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \ , \ c \le y \le d \ \} \ .$$

Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$:

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls stetige Funktionen φ_1, φ_2 und ξ_1, ξ_2 existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ \ (x,y,z) \mid a \le x \le b \ , \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \ , \ \xi_1(x,y) \le z \le \xi_2(x,y) \ \} \ .$$

Wie in der Darstellung im $\mathbb{R}^2$ können in der Darstellung x, y und z beliebig vertauscht sein.

Bemerkung:

Häufig lassen sich Mengen D, über die beispielsweise integriert werden soll, nicht durch einen einzigen Normalbereich darstellen, sondern nur durch Vereinigung mehrerer Normalbereiche.

Aufgabe 22:

a) (i) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (0,0)$ und $P_3 = (2,2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_D 18y \, d(x,y)$

b) (i) Man zeichne den durch $x \leq 0,\ z \geq 1,\ z \leq 3$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ beschriebenen Bereich Z und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_Z 3x \, d(x,y,z)$

Lösung:

a) (i) Die Geraden durch folgende Punkte lauten:
P_1, P_3: $g(x) = (x+4)/3$, P_1, P_2: $f_1(x) = -x$, P_2, P_3: $f_2(x) = x$.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leq x \leq 2\,,\ |x| \leq y \leq (x+4)/3 \right\}$$

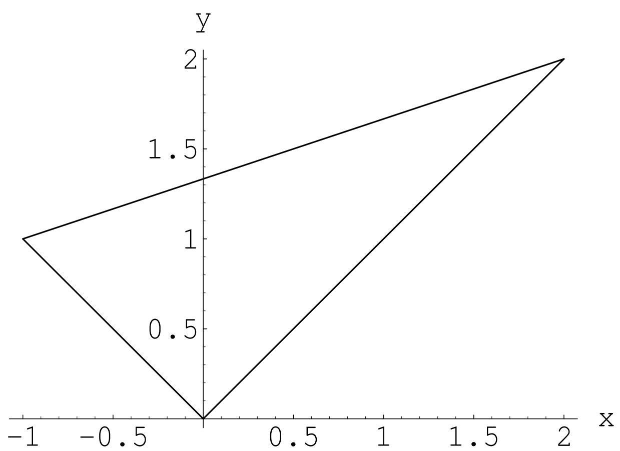

Bild 22 a) Dreieck D

$$\int_D 18y \, d(x,y) = \int_{-1}^{2} \int_{|x|}^{(x+4)/3} 18y \, dy \, dx = \int_{-1}^{2} 9y^2 \Big|_{|x|}^{(x+4)/3} dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+4)^2 - 9x^2 \, dx = \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3 \Big|_{-1}^{2} = 36$$

b) (i) $x \leq 0,\ z \geq 1,\ z \leq 3$ und $x^2 + y^2 \leq 4$ beschreibt einen halben Zylinder

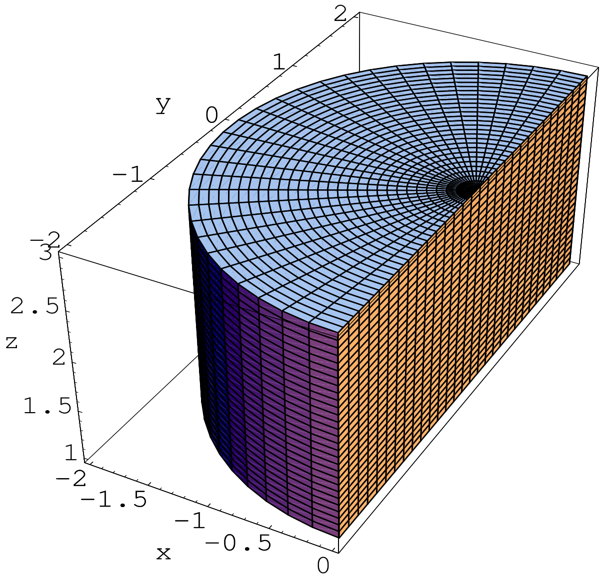

Bild 22 b) halber Zylinder Z

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \leq x \leq 0\,,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\,,\ 1 \leq z \leq 3 \right\}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{3} 3x \, dz \, dy \, dx \;=\; \int_1^3 dz \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x \, dy \, dx \\
&= 2 \int_{-2}^{0} 3xy\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \;=\; 2 \int_{-2}^{0} 6x\sqrt{4-x^2} \, dx \\
&= -4\,(4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{0} = -32
\end{aligned}$$

oder alternativ mit Transformation auf Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{1}^{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{2} 3r\cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^2 3r^2 \, dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\varphi) \, d\varphi \int_1^3 dz \\
&= \left(r^3\Big|_0^2 \right) \left(\sin(\varphi)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \left(z\Big|_1^3 \right) \\
&= 8 \cdot (-2) \cdot 2 = -32
\end{aligned}$$

Masse, Schwerpunkt und Trägheitsmoment eines Körpers K:

Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der nichtnegativen stetigen Massendichtefunktion $\rho : K \to \mathbb{R}$.

Die **Masse** M des Körpers K berechnet sich durch

$$M = \int_K \rho(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

Der **Schwerpunkt** $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers K ist gegeben durch

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_K \rho(x,y,z) \cdot x\, d(x,y,z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x,y,z) \cdot y\, d(x,y,z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x,y,z) \cdot z\, d(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Das **Trägheitsmoment** Θ_A eines Körpers K bezüglich einer Drehachse A berechnet sich durch

$$\Theta_A = \int_K \rho(x,y,z) r^2(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

Dabei gibt $r(x,y,z)$ den Abstand des Punktes $(x,y,z)^T \in K$ zu A an.

Steinerscher Satz:

Ist S eine zu A parallele Achse, die durch den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers K verläuft, d der Abstand der Achse A von $\boldsymbol{x}_s$ und M die Masse von K, so gilt bei konstanter Dichte ρ

$$\Theta_A = Md^2 + \Theta_S.$$

Koordinatentransformationen:

a) **Polarkoordinaten:** $0 \leq r \leq R\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$0 \leq r \leq R\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad a \leq z \leq b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi,z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$0 \leq r \leq R\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \big(\Rightarrow \det(\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta\big)$$

Transformationssatz:

Für stetige Funktionen $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_D f(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})) \cdot |\det(\boldsymbol{J\Phi}(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar, $K = \boldsymbol{\Phi}(D)$ und der C^1-Koordinatentransformation $\boldsymbol{\Phi} : D \to \mathbb{R}^n$. Die Transformation $\boldsymbol{\Phi}$ muss dabei auf D^0 invertierbar sein.

Aufgabe 23:

a) Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2+y^2+z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

b) Durch $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ wird eine Kugel K beschrieben. K habe die konstante Dichte ρ.

(i) Man zeichne K unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

(ii) Für K berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

(iii) Man berechne das Trägheitsmoment von K bezüglich der zur z-Achse parallelen Achse D, die durch den Punkt $(2,1,3)^T$ verläuft.

Lösung:

a)

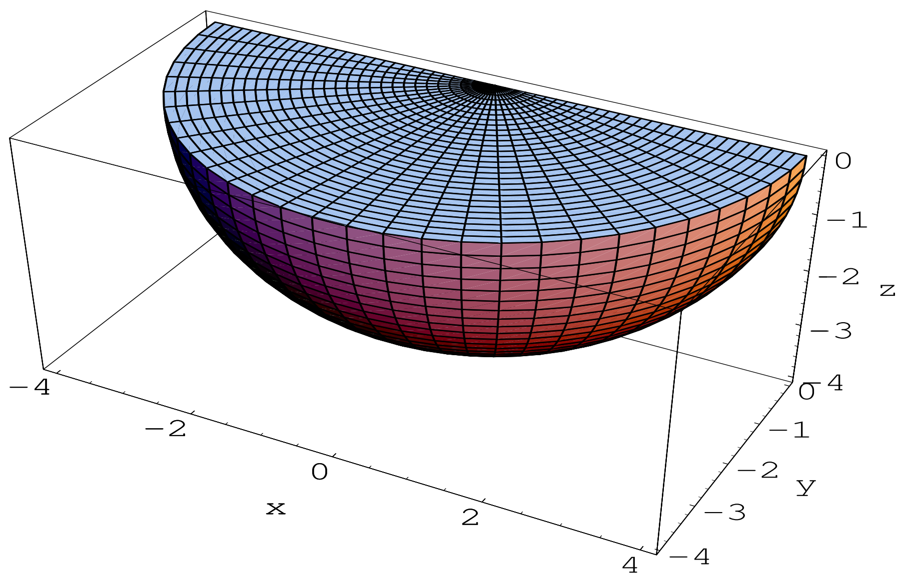

Bild 23 a) Viertelkugel K

Kugelkoordinaten für K: $0 \leq r \leq 4$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi,\theta) , \quad \det \boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi,\theta) = r^2\cos(\theta)$$

Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$:

$$\begin{aligned} M &= \int_K x^2+y^2+z^2+1 \, d(x,y,z) = \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2+1)r^2\cos(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} r^4+r^2 \, d\varphi\, dr = \int_0^4 \pi(r^4+r^2)\, dr = \left.\frac{(3\cdot r^5+5\cdot r^3)\pi}{15}\right|_0^4 = \frac{3392\pi}{15} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s):

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)x \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\cos(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\cos(\varphi)\; \frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\bigg|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= \frac{\pi}{4M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \sin(\varphi)\big|_\pi^{2\pi}\; dr = 0
\end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)y \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\sin(\varphi)\; \frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\bigg|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= -\frac{\pi}{4M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \cos(\varphi)\big|_\pi^{2\pi}\; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)\big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{M}\int_K (x^2+y^2+z^2+1)z \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^4\int_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\; \frac{\sin^2(\theta)}{2}\bigg|_{-\pi/2}^{0} \; d\varphi\; dr \\
&= -\frac{1}{2M}\int_0^4 (r^5+r^3)\; \varphi\big|_\pi^{2\pi}\; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)\big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

b) (i) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','3*cos(s)*cos(t)','3*sin(s)*cos(t)','3*sin(t)',
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```

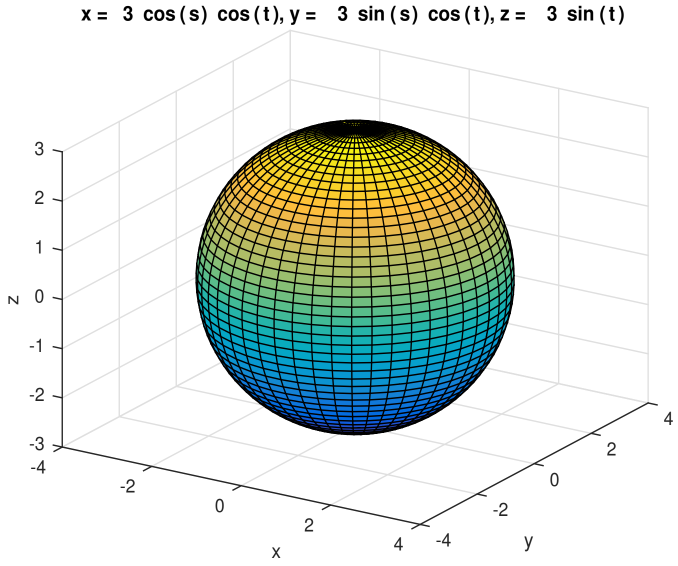

Bild 23 b) Kugel K mit Radius $R = 3$

(ii) Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ:

$$\begin{aligned}
M &= \int_K \rho \, d(x,y,z) = \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \rho \int_0^3 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\, d\theta \;=\; \rho \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi}\, (\sin(\theta))|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \;=\; \rho \frac{4\pi 3^3}{3} \;=\; 36\pi\rho
\end{aligned}$$

Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich der z-Achse in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ und des Additionstheorems $\cos^3(\theta) = (3\cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$\begin{aligned}
\Theta_z &= \int_K \rho(x^2+y^2)\, d(x,y,z) \\
&= \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(r^2 \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)\right) r^2 \cos(\theta)\, d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \rho \int_0^3 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \rho \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi}\, \frac{1}{4}\left(3\sin(\theta) + \frac{1}{3}\sin(3\theta)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \rho \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \;=\; \frac{648\pi\rho}{5}
\end{aligned}$$

(iii) Da der Schwerpunkt von P aus Symmetriegründen im Ursprung liegt, gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2+1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5}\,.$$

Kurvenintegrale 2. Art:

Gegeben sei eine vektorwertige und stetige Funktion

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)^T &\mapsto \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und eine stückweise C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$, $t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

Definition:

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b \langle \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \; dt$$

heißt **Kurvenintegral 2. Art**. Ist die Kurve **geschlossen**, d.h. gilt $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, so schreibt man auch $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 24:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H : \; x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x + y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix} .$$

Lösung:

a) Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen:
$\partial H = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, mit

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\,.$$

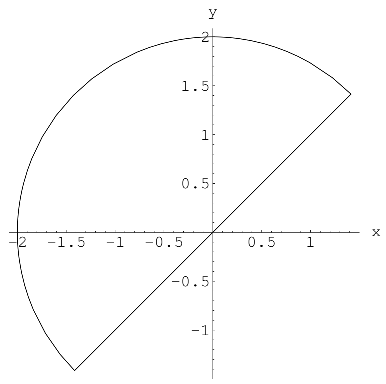

Bild 24 a) Halbkreisrandkurve ∂G

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int_{\mathbf{c}_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \langle \boldsymbol{f}(\mathbf{c}_1(t)), \dot{\mathbf{c}}_1(t) \rangle\,dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \langle \boldsymbol{f}(\mathbf{c}_2(t)), \dot{\mathbf{c}}_2(t) \rangle\,dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix} 4\cos t\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&\quad + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} -8\cos t\sin^2 t + 2\cos t\,dt + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 + 1\,dt \\
&= \left(-\frac{8\sin^3 t}{3} + 2\sin t \right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left(\frac{t^3}{3} + t \right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Alternative Berechnung:

Mit dem Integralsatz von Green und Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_H \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int\int_H -x\, d(x,y) \\
&= -\int_0^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r\cos(\varphi)\cdot r\, d\varphi\, dr \;=\; -\int_0^2 r^2\, dr \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi \\
&= -\left(\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2\right)\left(\sin\varphi|_{\pi/4}^{5\pi/4}\right) \;=\; -\frac{8}{3}\cdot\left(-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;=\; \frac{8\sqrt{2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

b)

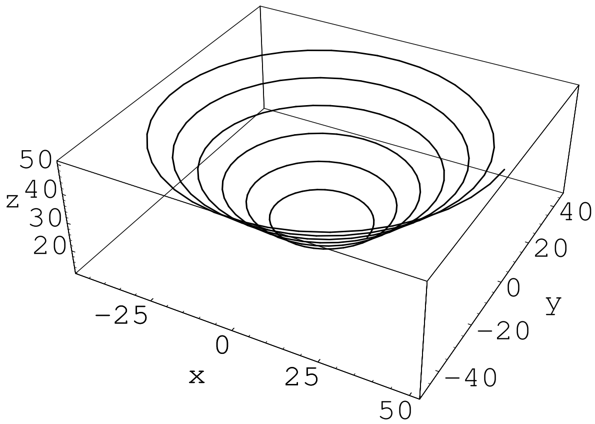

Bild 24 b) Kurve **c**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{4\pi}^{16\pi} \langle \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\; dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \\ (t\sin t + t\cos t)/t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 + \sin t + \cos t\, dt \;=\; \int_{4\pi}^{16\pi} t^2\, dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_{4\pi}^{16\pi} \;=\; \frac{\pi^3(16^3 - 4^3)}{3} = 1344\pi^3
\end{aligned}$$