

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. K. Rothe

WiSe 2023/24

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Implizite Funktionen:

Untersucht wird die Auflösbarkeit der Gleichungssystems

$$\begin{aligned}g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0,\end{aligned}$$

kurz mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ bezeichnet, nach der Variablen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

In diesem Fall wäre \mathbf{y} als Funktion von \mathbf{x} darstellbar,
d.h. es würde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gelten mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$.

In der Gleichung $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$

wäre also implizit die Funktion \mathbf{f} enthalten.

Satz über implizite Funktionen

Gegeben sei eine C^1 -Funktion

$$\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

und ein Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ mit $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^m$,

für den $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ gilt.

Außerdem sei die folgende $m \times m$ Teilmatrix von $\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ regulär:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$

mit $\mathbf{x}^0 \in U$, $\mathbf{y}^0 \in V$ und $U \times V \subset D$

und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion

$$\mathbf{f} : U \rightarrow V$$

mit

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in U.$$

Die Jacobimatrix \mathbf{Jf} berechnet sich für alle $\mathbf{x} \in U$ durch Differentiation der impliziten Gleichung $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ (nach der Kettenregel), also aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} .$$

Implizite Darstellung ebener Kurven:

Für eine C^1 -Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wird die durch

$$g(x, y) = 0$$

gegebene Lösungsmenge untersucht.

Auflösbarkeit der Gleichung nach einer der Variablen ist gewährleistet,

wenn $g_x \neq 0$ oder $g_y \neq 0$ gilt, also

$$\text{grad } g = (g_x, g_y) \neq \mathbf{0} .$$

Die Punkte (x_0, y_0) für die $\text{grad } g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ gilt,
heißen daher **regulär**.

In regulären Punkten wird die Lösungsmenge

$$g = 0$$

also durch eine Höhenlinie beschrieben.

Dabei liegt eine **horizontale Tangente** in (x_0, y_0) vor,
falls insgesamt

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) = 0, \quad g_y(x_0, y_0) \neq 0$$

gilt und eine **vertikale Tangente** für

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad g_y(x_0, y_0) = 0.$$

Die Punkte (x_0, y_0) für die $\text{grad } g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ gilt,
werden als **singulär** oder auch **stationär** bezeichnet.

Klassifikation singulärer Punkte von $g(x, y) = 0$:

(x_0, y_0) ist **isolierter Punkt**, falls $\det \mathbf{H}g(x_0, y_0) > 0$,

(x_0, y_0) ist **Doppelpunkt**, falls $\det \mathbf{H}g(x_0, y_0) < 0$.

Aufgabe 17:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve.

a) Man bestimme die Symmetrien der Kurve.

Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden, d.h. es gilt $f(x, y) = f(y, x)$.

Wir erinnern uns dabei an die Spiegelungsmatrix \mathbf{S}_α :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{4}\right) & -\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{4}\right) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{S}_{\pi/4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

b) Man bestimme die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente.

$$\text{grad}f(x, y) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)^T$$

Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x, y) \neq 0.$$

$$0 = f_x(x, y) = 3x^2 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f_y(x, 3x^2) = x^3 + (3x^2)^3 - x3x^2 = x^3(27x^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 2^{2/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_1 gilt die Bedingung $f_y(P_1) \neq 0$.

Also ist P_1 ein Punkt mit horizontaler Tangente.

- c) Man bestimme die Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente.

Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x, y) \neq 0 .$$

$$0 = f_y(x, y) = 3y^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 3y^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f(3y^2, y) = (3y^2)^3 + y^3 - 3y^2y = y^3(27y^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{2/3} \\ 2^{1/3} \end{pmatrix} .$$

Nur für P_2 gilt die Bedingung $f_x(P_2) \neq 0$.

Also ist P_2 ein Punkt mit vertikaler Tangente.

Dieses ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Symmetrie.

d) Man klassifiziere die singulären Punkte der Kurve.

Für $P_0 = (0, 0)^T$ gilt $\text{grad}f(0, 0) = \mathbf{0}$,
damit ist P_0 ein singulärer Punkt.

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det \mathbf{H}f(0, 0) = -1 < 0$
handelt es sich bei P_0 um einen Doppelpunkt.

e) Man zeichne die Niveaumenge:

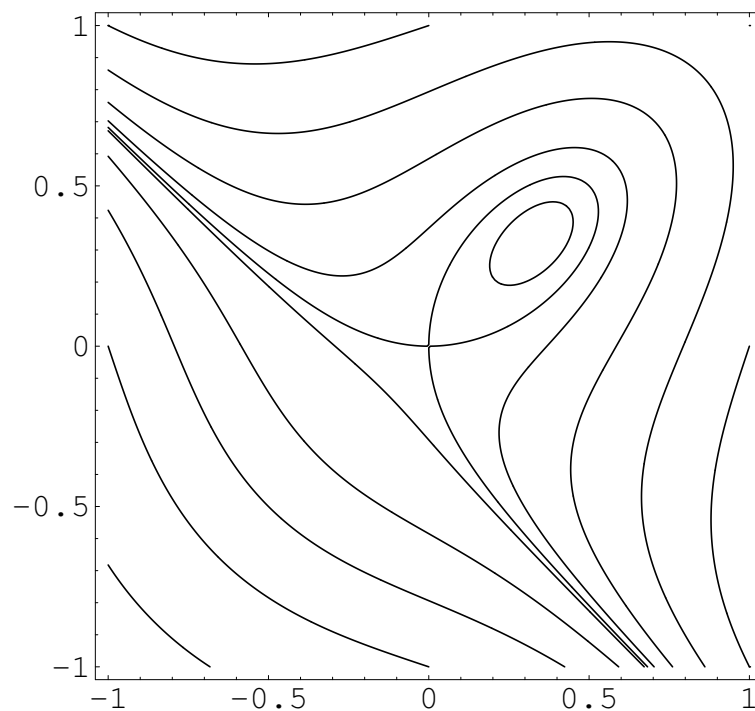
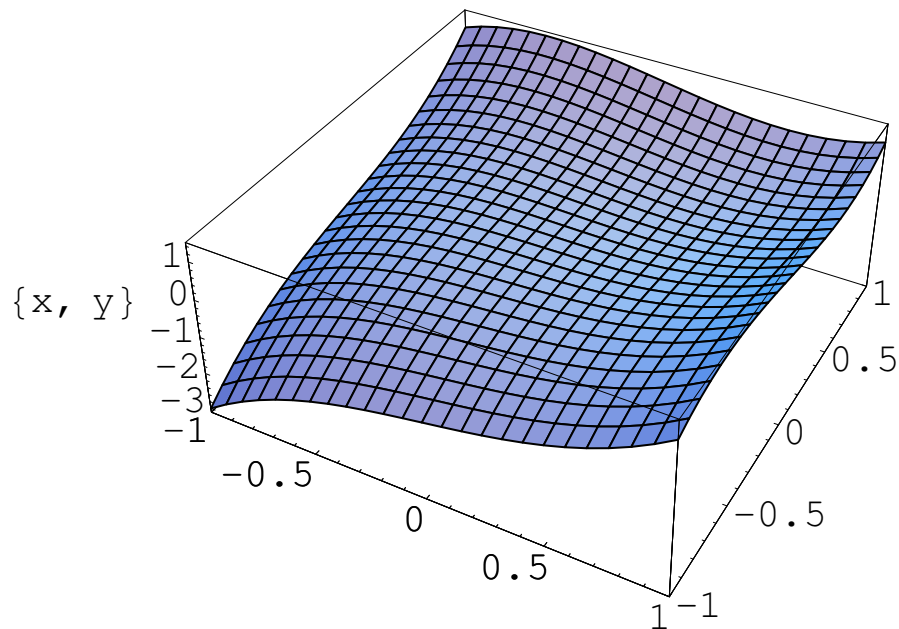


Bild 17 $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy = c$
für $c = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.025, 0, 0.05, 0.2, 0.5, 1$

Tangentialebene

einer implizit dargestellten Fläche:

Die Lösungsmenge

$$g(x, y, z) = 0$$

einer C^1 -Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

beschreibt in (x_0, y_0, z_0) mit $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ lokal eine Fläche, falls $\text{grad } g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ gilt.

Gilt beispielsweise $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

so liegt Auflösbarkeit nach $z = z(x, y)$ vor, mit $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Die Parameterform der Tangentialebene im \mathbb{R}^3 an

den Funktionsgraphen $(x, y, z(x, y))^T$ ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen erhält man

$$(g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0)) + g_z(x_0, y_0, z_0) (z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = (0, 0),$$

und damit

$$(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = - \left(\frac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}, \frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \right).$$

Die Richtungsvektoren der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix}$$

stehen dabei senkrecht auf

$$\text{grad } g(x_0, y_0, z_0) = (g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0), g_z(x_0, y_0, z_0))^T.$$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3.$$

- a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

Durch quadratische Ergänzungen kann h übersichtlicher dargestellt werden:

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3 = (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2$$

Wegen $h(-1, 1, -2) = 1$ stellt sich die Niveaumenge als einschaliges Hyperboloid heraus und wird damit durch die standardisierte implizite Gleichung

$$g(x, y, z) := (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 - 1 = 0$$

beschrieben.

Um festzustellen, ob $g(x, y, z) = 0$
in der Umgebung des Punktes $(-1, 1, -2)$
eine glatte Fläche bildet,
muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (-2(x+1), 2y, 2(z+2))^T \Rightarrow$$

$$\text{grad } g(-1, 1, -2) = (0, 2, 0)^T.$$

Damit ist nur $g_y(-1, 1, -2) = 2$
invertierbare 1×1 Untermatrix.

Nach dem Satz über implizite Funktionen
bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche,
die durch Auflösen von $g(x, y, z) = 0$
nach y beschreibbar ist,
d.h. es gilt in einer Umgebung von $(-1, 1, -2)$

$$y = f(x, z), \quad \text{mit} \quad f(-1, -2) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, f(x, z), z) = 0.$$

- b) Man löse obige Gleichung
gegebenenfalls nach einer der Variablen auf,
um die Fläche explizit anzugeben.

Auflösen der impliziten Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ergibt
zunächst

$$y = \pm \sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}.$$

Aus diesen beiden Möglichkeiten folgt,
wegen $y = f(-1, -2) = 1$

$$f(x, z) = \sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}.$$

- c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

In $(-1, 1, -2)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1 , in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, z) \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ T_1(x, z; -1, -2) \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird die durch implizites Differenzieren von $g(x, f(x, z), z) = 0$ mittels Kettenregel entstehende Jacobimatrix von f benötigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}f(x, z) &= (f_x, f_z) = -(g_y)^{-1}(g_x, g_z) \\ &= -\frac{1}{2y}(-2x - 2, 2z + 4) \\ \Rightarrow \mathbf{J}f(-1, -2) &= -\frac{1}{2 \cdot 1}(0, 0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (-2(x + 1), 2y, 2(z + 2))^T$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ T_1(x, z; -1, -2) \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ f(-1, -2) + \mathbf{J}f(-1, -2) \begin{pmatrix} x + 1 \\ z + 2 \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z + 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

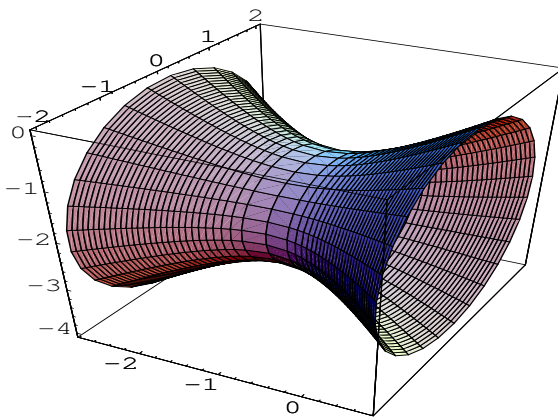
Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann die Fläche

$$h(x, y, z) = (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 1$$

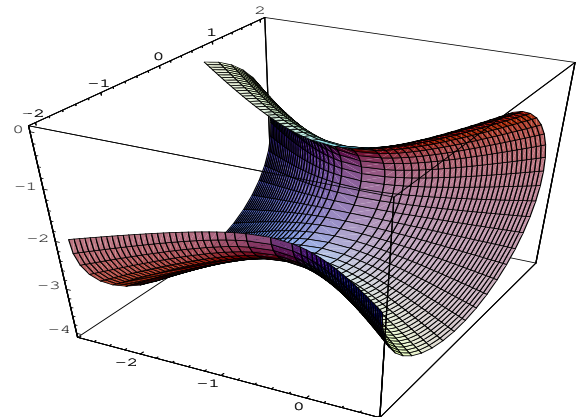
folgendermaßen durch $(r, \varphi) \in [1, R] \times [0, 2\pi]$

parametrisiert werden:

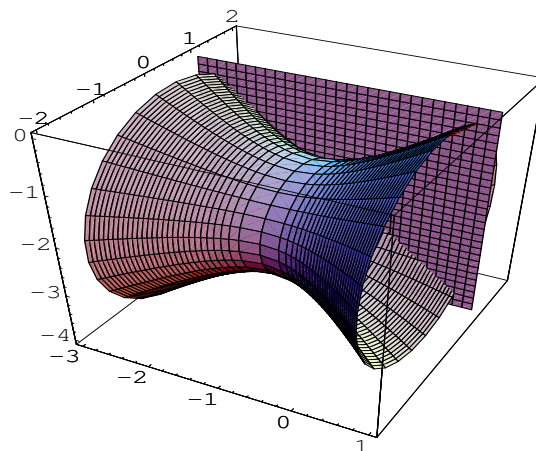
$$y = r \cos \varphi, z = r \sin \varphi - 2 \Rightarrow p_{\pm}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{r^2 - 1} \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi - 2 \end{pmatrix}$$



ohne Tangentialebene



aufgeschnitten



mit Tangentialebene

Bild 18 einschaliges Hyperboloid $(z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 1$

Extremalprobleme

mit Gleichungsnebenbedingungen:

Gesucht sind die Extremwerte einer C^1 -Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

auf der folgenden Teilmenge des Definitionsbereiches:

$$G := \{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \subset D.$$

mit einer C^1 -Funktion

$$\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

und $m < n$, d.h. die Extremalwerte müssen zusätzlich noch die m Gleichungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))^T = \mathbf{0}$$

erfüllen.

Satz: (Lagrange-Multiplikatoren-Regel)

Sei $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum der Funktion f
unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$,
das die **Regularitätsbedingung**

$$\text{Rang } \mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0) = m$$

erfüllt.

Dann gibt es **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_1, \dots, \lambda_m$,
so dass die **Lagrange-Funktion**

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

die **notwendige Bedingung erster Ordnung** erfüllt:

$$\text{grad } F(\mathbf{x}^0) = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } g_i(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} .$$

Satz: (hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)

Gilt $\text{Rang } \mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0) = m$ für $\mathbf{x}^0 \in G$

und $\text{grad } F(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$

und ist $\mathbf{HF}(\mathbf{x}^0)$ positiv definit auf

$$TG(\mathbf{x}^0) := \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \text{grad } g_i(\mathbf{x}^0), \mathbf{y} \rangle = 0 \} ,$$

d.h. gilt $\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{HF}(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} > 0$ für $\mathbf{y} \in TG(\mathbf{x}^0) \setminus \{\mathbf{0}\}$,

dann besitzt f in \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum

unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Aufgabe 19:

Man berechne die Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$$

auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

a) Unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

sollen die Extremalpunkte der Funktion

$$f(x, y) = x + y$$

mit der Lagrangeschen Multiplikatorenregel bestimmt werden.

Regularitätsbedingung:

$$\text{grad } g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Rightarrow (x, y) = (0, 0),$$

d.h. nur $(0, 0)$ verletzt die Regularitätsbedingung.

Da $g(0, 0) = -1$ gilt, liegt $(0, 0)$ nicht auf dem Kreis liegt.

Alle zulässigen Punkte, d.h. die mit $g(x, y) = 0$, erfüllen also die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}(\mathbf{J}g(x, y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y
und die zweite mit x
und subtrahiert beide, so erhält man

$$x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Extremalkandidaten:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Menge $g(x, y) = 0$ einen Kreis beschreibt,
ist sie kompakt.

Damit nimmt die stetige Funktion f
auf $g(x, y) = 0$ Maximum und Minimum an.

Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$.

Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

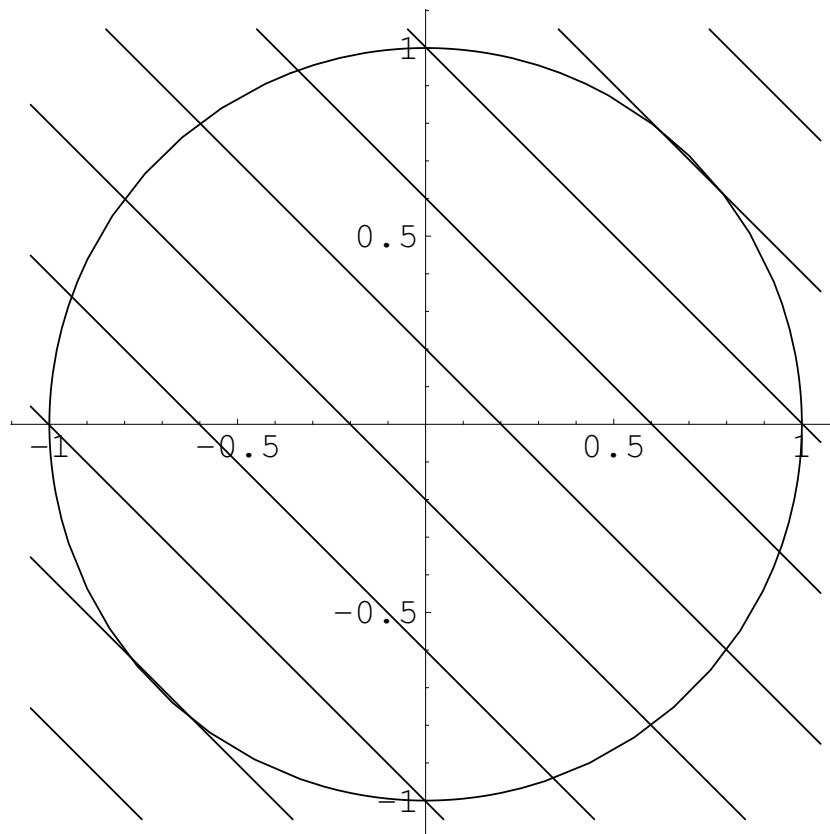


Bild 19 a) Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
mit Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x + y$

b) Parametrisierung des Kreises

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

durch \mathbf{c} und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe für $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Der Kreis wird durch Polarkoordinaten parametrisiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t), \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$.

Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan t = 1$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t$$

$$\Rightarrow h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0, h''(t_2) = \sqrt{2}$$

Damit ist

$t_1 = \pi/4$ ein Maximum mit $h(t_1) = \sqrt{2}$

und

$t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum mit $h(t_2) = -\sqrt{2}$.

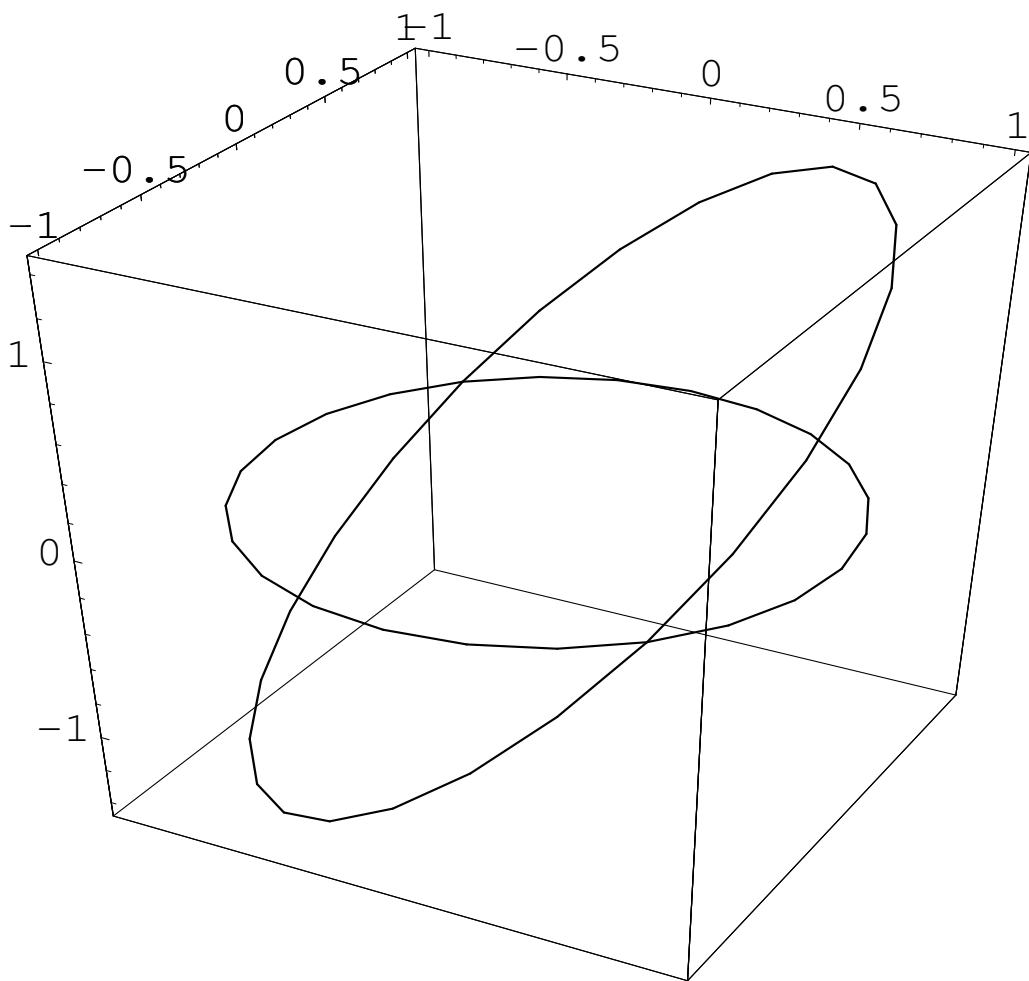


Bild 19 b) $\mathbf{c}(t)$ und $f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Aufgabe 20:

Für die Funktion

$$f(x, y, z) = z^2$$

berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Nebenbedingungen:

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 9 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) := y - z \quad .$$

Regularitätsbedingung:

$$\mathbf{J}g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt den Rang < 2 ,

wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist,

d.h. für die Punkte $(0, 0, z)$.

Diese sind wegen

$$g_1(0, 0, z) = -9$$

jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung.

Die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion:

$$F(x, y, z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - 9 \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:

1.Fall: $x = 0$

$$\Rightarrow 0 = g_1(0, y, z) = y^2 - 9$$

$$\Rightarrow y = 3 = z \quad \vee \quad y = -3 = z$$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0 = y \quad \Rightarrow \quad x = 3 \vee x = -3$$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ist eine Ellipse und damit kompakt.

Die stetige Funktion f nimmt dort also ihr absolutes Maximum und Minimum an.

Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Die Funktionswerte der Extremalkandidaten lauten

$$f(P_{1,2}) = 9, \quad f(P_{3,4}) = 0.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

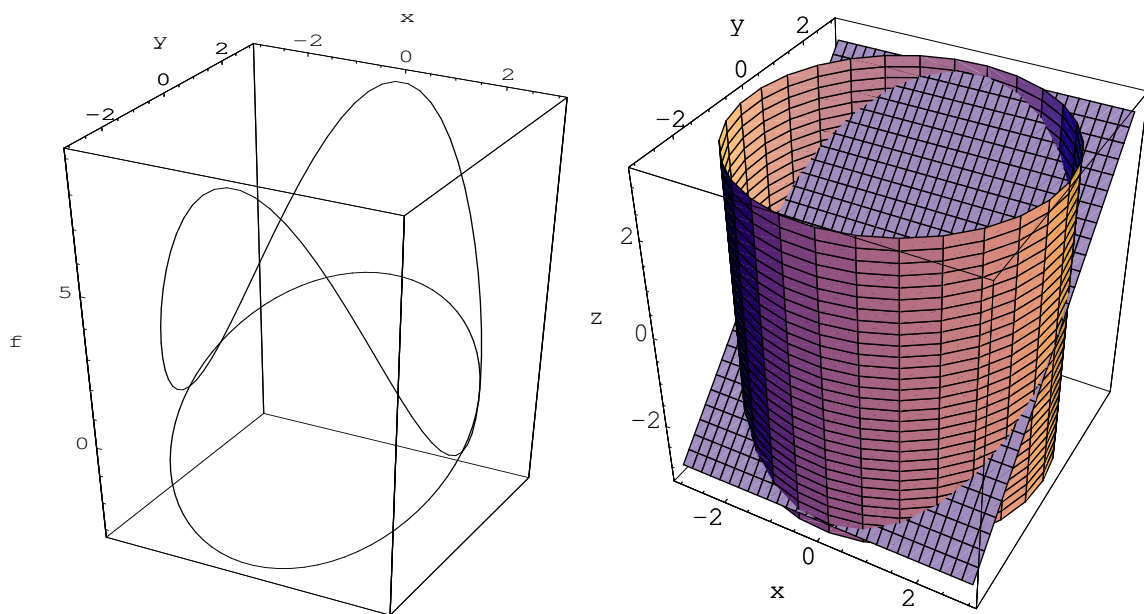


Bild 20 f auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$