Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Implizite Funktionen:

Untersucht wird die Auflösbarkeit der Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} g_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) & = & 0\,, \end{array}$$

kurz mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ bezeichnet, nach der Variablen $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

In diesem Fall wäre $\boldsymbol{y}$ als Funktion von $\boldsymbol{x}$ darstellbar, d.h. es würde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ gelten mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.

In der Gleichung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ wäre also implizit die Funktion $\boldsymbol{f}$ enthalten.

Satz über implizite Funktionen

Gegeben sei eine C^1-Funktion $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und ein Punkt $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) \in D$ mit $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^m$, für den $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}$ gilt.

Außerdem sei die folgende $m \times m$ Teilmatrix von $\boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0)$ regulär:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0) \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es offene Mengen $U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x}^0 \in U$, $\boldsymbol{y}^0 \in V$ und $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{f} : U \to V$ mit

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in U\,.$$

Die Jacobimatrix $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$ berechnet sich für alle $\boldsymbol{x} \in U$ durch Differentiation der impliziten Gleichung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ (nach der Kettenregel), also aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\,.$$

Implizite Darstellung ebener Kurven:

Für eine C^1-Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird die durch

$$g(x, y) = 0$$

gegebene Lösungsmenge untersucht. Auflösbarkeit der Gleichung nach einer der Variablen ist gewährleistet, wenn $g_x \neq 0$ oder $g_y \neq 0$, also

$$\operatorname{grad} g \neq \boldsymbol{0}$$

gilt. Die Punkte (x_0, y_0) für die $\operatorname{grad} g(x_0, y_0) \neq \boldsymbol{0}$ gilt, heißen daher **regulär**. In regulären Punkten wird die Lösungsmenge $g = 0$ also durch eine Höhenlinie beschrieben.

Dabei liegt eine **horizontale Tangente** in (x_0, y_0) vor, falls insgesamt

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) = 0, \quad g_y(x_0, y_0) \neq 0$$

gilt und eine **vertikale Tangente** für

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad g_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

Die Punkte (x_0, y_0) für die $\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = \boldsymbol{0}$ gilt, werden als **singulär** oder auch **stationär** bezeichnet.

Klassifikation singulärer Punkte von $g(x, y) = 0$:

(x_0, y_0) ist **isolierter Punkt**, falls $\det \boldsymbol{H} g(x_0, y_0) > 0$,

(x_0, y_0) ist **Doppelpunkt**, falls $\det \boldsymbol{H} g(x_0, y_0) < 0$.

Aufgabe 17:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Lösung:

$f(x, y) := x^3 + y^3 - xy = 0\,, \quad$ grad $f(x, y) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)^T$

a) Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden, d.h. es gilt $f(x, y) = f(y, x)$. Wir erinnern uns dabei an die Spiegelungsmatrix $\boldsymbol{S}_\alpha$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \pi/4) & \sin(2 \cdot \pi/4) \\ \sin(2 \cdot \pi/4) & -\cos(2 \cdot \pi/4) \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{S}_{\pi/4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

b) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x, y) \neq 0\,.$$

$$0 = f_x(x, y) = 3x^2 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x^2 \quad \Rightarrow$$
$$0 = f(x, 3x^2) = x^3 + (3x^2)^3 - x3x^2 = x^3(27x^3 - 2)$$
$$\Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 2^{2/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_1 gilt die Bedingung $f_y(P_1) \neq 0$. Also ist P_1 ein Punkt mit horizontaler Tangente.

c) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x, y) \neq 0\,.$$

$$0 = f_y(x, y) = 3y^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 3y^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f(3y^2, y) = (3y^2)^3 + y^3 - 3y^2 y = y^3(27y^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \lor y = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{2/3} \\ 2^{1/3} \end{pmatrix}.$$

Nur für P_2 gilt die Bedingung $f_x(P_2) \neq 0$. Also ist P_2 ein Punkt mit vertikaler Tangente. Dieses ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Symmetrie.

d) Für $P_0 = (0,0)^T$ gilt $\operatorname{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$, damit ist P_0 ein singulärer Punkt.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det \boldsymbol{H} f(0,0) = -1 < 0$ handelt es sich bei P_0 um einen Doppelpunkt.

e)

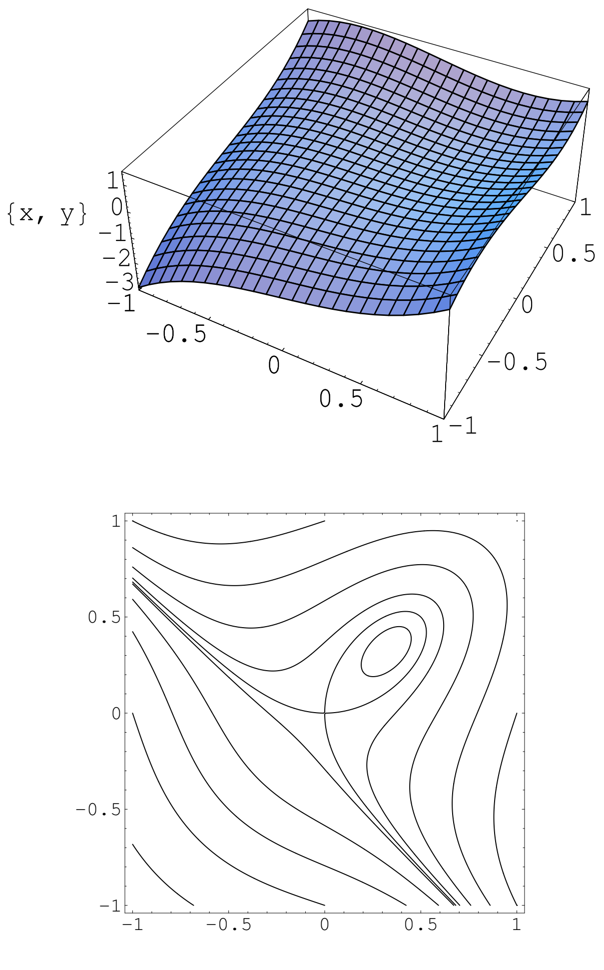


Bild 17 $\quad f(x,y) = x^3 + y^3 - xy = c$

für $c = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.025, 0, 0.05, 0.2, 0.5, 1$

Tangentialebene einer implizit dargestellten Fläche:

Die Lösungsmenge
$$g(x, y, z) = 0$$
einer C^1-Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschreibt in (x_0, y_0, z_0) mit $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ lokal eine Fläche, falls grad $g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ gilt.

Gilt beispielsweise $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so liegt Auflösbarkeit nach $z = z(x, y)$ vor, mit $z_0 = z(x_0, y_0)$. Die Parameterform der Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$ an den Funktionsgraphen $(x, y, z(x, y))^T$ ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen erhält man

$$(g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0)) + g_z(x_0, y_0, z_0) \, (z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = (0, 0) ,$$

und damit

$$(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = - \left(\frac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}, \frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \right) .$$

Die Richtungsvektoren der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix}$$

stehen dabei senkrecht auf

$$\operatorname{grad} g(x_0, y_0, z_0) = (g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0), g_z(x_0, y_0, z_0))^T .$$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Lösung:

a) Durch quadratische Ergänzungen kann h übersichtlicher dargestellt werden:

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3 = (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2$$

Wegen $h(-1, 1, -2) = 1$ stellt sich die Niveaumenge als einschaliges Hyperboloid heraus und wird damit durch die standardisierte implizite Gleichung

$$g(x, y, z) := (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 - 1 = 0$$

beschrieben. Um festzustellen, ob $g(x, y, z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(-1, 1, -2)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (-2(x + 1), 2y, 2(z + 2))^T \;\Rightarrow\; \text{grad } g(-1, 1, -2) = (0, 2, 0)^T\,.$$

Damit ist nur $g_y(-1, 1, -2) = 2$ invertierbare 1×1 Untermatrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x, y, z) = 0$ nach y beschreibbar ist, d.h. es gilt in einer Umgebung von $(-1, 1, -2)$

$$y = f(x, z)\,, \quad \text{mit} \quad f(-1, -2) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, f(x, z), z) = 0\,.$$

b) Auflösen der impliziten Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ergibt zunächst

$$y = \pm\sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}.$$

Aus diesen beiden Möglichkeiten folgt wegen $y = f(-1, -2) = 1$

$$f(x, z) = \sqrt{1 + (x + 1)^2 - (z + 2)^2}\,.$$

c) In $(-1, 1, -2)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1, in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird die durch implizites Differenzieren der Gleichung $g(x, f(x,z), z) = 0$ mittels Kettenregel entstehende Jacobimatrix von f benötigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}f(x,z) &= (f_x, f_z) \;=\; -(g_y)^{-1}(g_x, g_z) \\ &= -\frac{1}{2y}(-2x-2, 2z+4) \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}f(-1,-2) &= -\frac{1}{2 \cdot 1}(0,0) = (0,0)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(-1,-2) + \boldsymbol{J}f(-1,-2)\begin{pmatrix} x+1 \\ z+2 \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix}$$

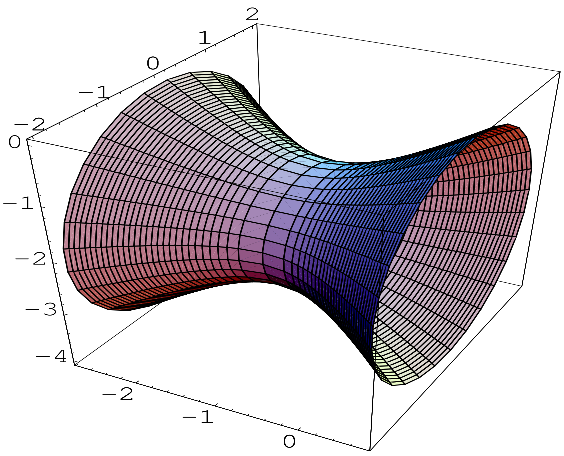
$$= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z+2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann die Fläche

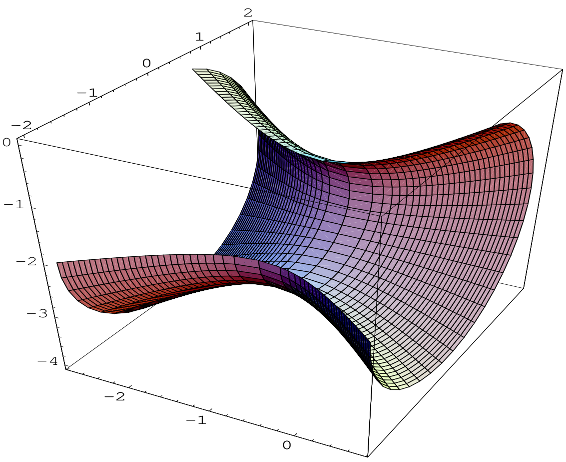
$$h(x,y,z) = (z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1$$

folgendermaßen durch $(r,\varphi) \in [1,R] \times [0,2\pi]$ parametrisiert werden:

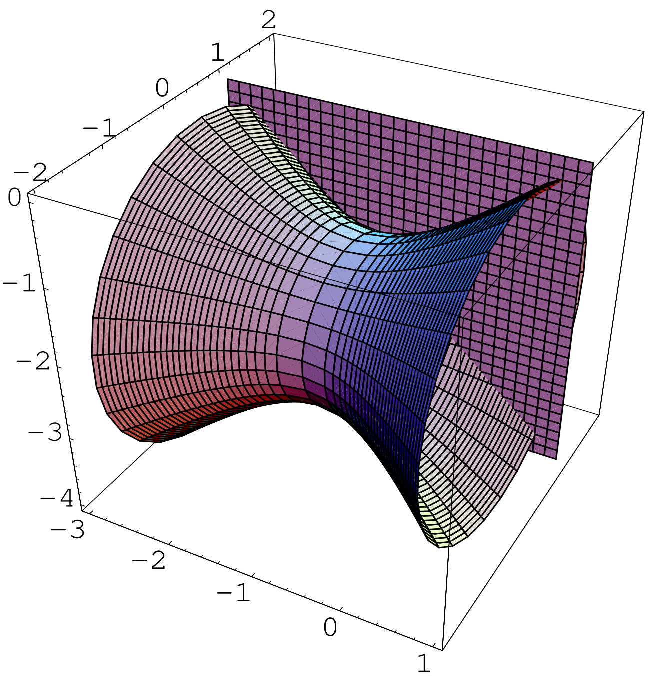
$$y = r\cos\varphi\,,\; z = r\sin\varphi - 2 \;\Rightarrow\; p_{\pm}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{r^2-1} \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi - 2 \end{pmatrix}$$



ohne Tangentialebene



aufgeschnitten



mit Tangentialebene

Bild 18 einschaliges Hyperboloid $(z+2)^2 + y^2 - (x+1)^2 = 1$

Extremalprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen:

Gesucht sind die Extremwerte einer C^1-Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der folgenden Teilmenge (Menge der **zulässigen Punkte**) des Definitionsbereiches

$$G := \{\boldsymbol{x} \in D \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \subset D\,.$$

mit einer C^1-Funktion $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ und $m < n$, d.h. die Extremalwerte müssen zusätzlich noch die m Gleichungen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))^T = \boldsymbol{0}$ erfüllen.

Satz: (Lagrange-Multiplikatoren-Regel)

Sei $\boldsymbol{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$, das die **Regularitätsbedingung**

$$\text{Rang } \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = m$$

erfüllt. Dann gibt es **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass die **Lagrange-Funktion**

$$F(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

die **notwendige Bedingung erster Ordnung** erfüllt:

$$\text{grad } F(\boldsymbol{x}^0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \text{grad } g_i(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Satz: (hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)

Gilt Rang $\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = m$ für $\boldsymbol{x}^0 \in G$ und grad $F(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ und ist $\boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0)$ positiv definit auf

$$TG(\boldsymbol{x}^0) := \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle \text{grad } g_i(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{y} \right\rangle = 0\right\}\,,$$

d.h. gilt $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{y} > 0$ für $\boldsymbol{y} \in TG(\boldsymbol{x}^0)\backslash\{\boldsymbol{0}\}$, dann besitzt f in $\boldsymbol{x}^0$ ein strenges lokales Minimum unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Aufgabe 19:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Lösung:

Unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ sollen die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y) = x + y$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

grad $g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Da $g(0,0) = -1$ gilt, $(0,0)$ also nicht auf dem Kreis liegt, erfüllen alle zulässigen Punkte ($g(x,y) = 0$) die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}(\boldsymbol{J}g(x,y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, so erhält man $x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y$.

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Extremalkandidaten:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Menge $g(x,y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt. Damit nimmt die stetige Funktion f auf $g(x,y) = 0$ Maximum und Minimum an. Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$. Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \mathrm{grad}\ g(x,y) = (2x, 2y)$ überprüft.

$$P_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \pm(\sqrt{2},\sqrt{2}) \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \mathrm{spann}\left\{\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Aus $1 + 2\lambda x = 0$ erhält man $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_1 und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_2.
Damit ergibt sich

$$\mathrm{Hess}F(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hess}F(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\boldsymbol{y}^T\mathrm{Hess}F(P_1)\boldsymbol{y} = -2\sqrt{2} < 0$ ist P_1 ein strenges lokales Maximum. Für P_2 erhält man $\boldsymbol{y}^T\mathrm{Hess}F(P_2)\boldsymbol{y} = 2\sqrt{2} > 0$. Damit ist P_2 ein strenges lokales Minimum.

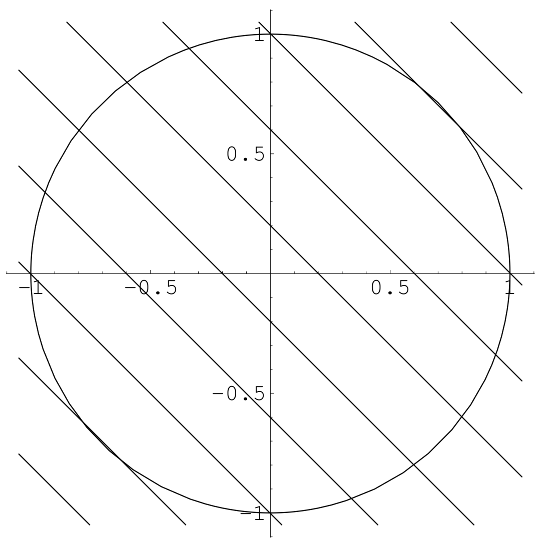


Bild 19 a) Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = x + y$

b) Der Kreis $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ kann durch Polarkoordinaten parametrisiert werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t)\ , \quad 0 \le t < 2\pi\ ,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$. Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}\ ,\ t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t \quad \Rightarrow \quad h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0\ ,\ h''(t_2) = \sqrt{2}\ .$$

Damit liegt für $t_1 = \pi/4$ ein Maximum mit dem Funktionswert $h(t_1) = \sqrt{2}$ und für $t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum mit dem Funktionswert $h(t_2) = -\sqrt{2}$ vor.

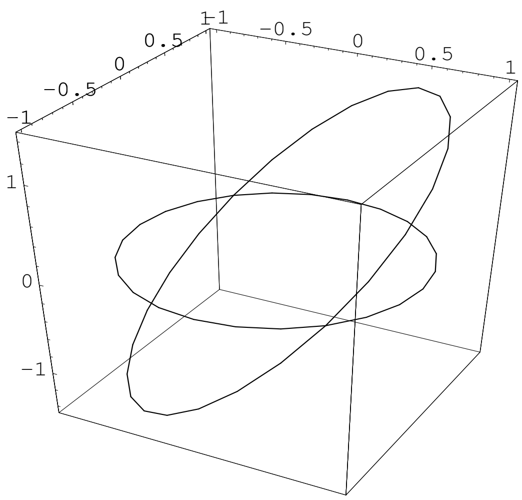


Bild 19 b) $\mathbf{c}(t)$ und $f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Aufgabe 20:

Für die Funktion $f(x,y,z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Lösung:

Nebenbedingungen: $g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 - 9$ und $g_2(x,y,z) = y - z$.

Regularitätsbedingung: $\boldsymbol{Jg}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

besitzt den Rang < 2, wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist, d.h. für die Punkte $(0,0,z)$. Diese sind wegen $g_1(0,0,z) = -9$ jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $F(x,y,z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - 9 \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:
1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0,y,z) = y^2 - 9 \Rightarrow y = 3 = z \vee y = -3 = z$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow z = 0 = y \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die stetige Funktion f nimmt auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, da diese Schnittmenge eine Ellipse und damit kompakt ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_{1,2}) = 9\,, \quad f(P_{3,4}) = 0\,.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2,3,4}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ überprüft.

Für $P_{1,2}$ erhält man

$$P_{1,2} = \pm(0,3,3)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \mathrm{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$0 = 2z - \lambda_2 = \pm 6 - \lambda_2 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \pm 6 \;\Rightarrow\; 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = \pm 6\lambda_1 \pm 6 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1$$

Damit ergeben sich $P_{1,2}$ als strenge lokale Maxima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{1,2})\boldsymbol{y} = -2 < 0\,.$$

Für $P_{3,4}$ mit $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0$ erhält man

$$P_{3,4} = (\pm 3,0,0)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{3,4}) = \mathrm{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ergeben sich $P_{3,4}$ als strenge lokale Minima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{3,4})\boldsymbol{y} = 2 > 0\,.$$

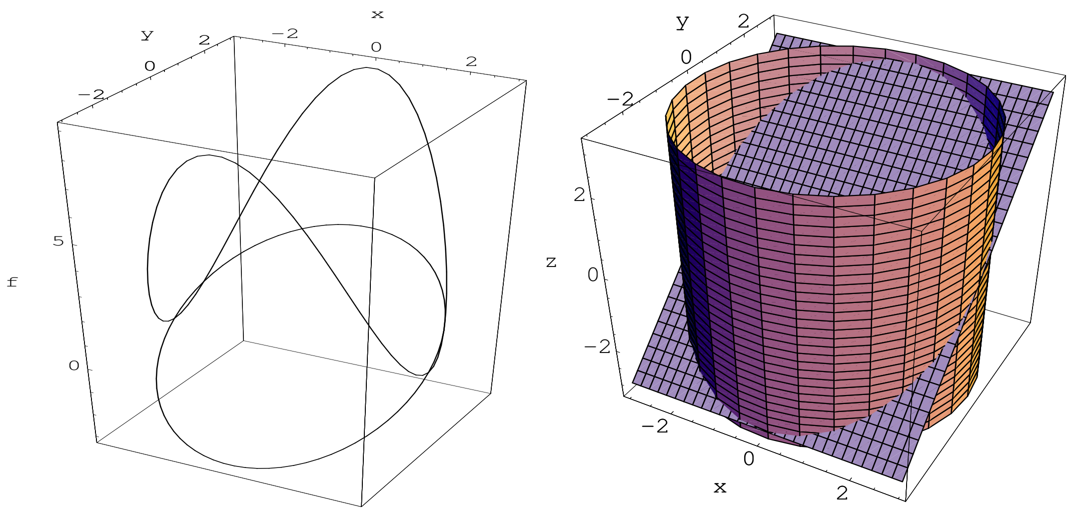


Bild 20: f auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$