

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgaben und Theorietipps zu Blatt 4

Taylor-Entwicklung:

Gegeben sei eine in $D \subset \mathbb{R}^n$ m -mal stetig partiell differenzierbare Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

mit D offen und konvex, $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{x}^0 \in D$. Dann heißt

$$T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) := \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \left(((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla)^j f \right) (\mathbf{x}^0)$$

Taylorpolynom m -ten Grades von f zum **Entwicklungspunkt** \mathbf{x}^0 .

Alternative Darstellung über **Multiindices**:

α_i Anzahl der Ableitungen nach x_i ,

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!,$$

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

$$T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
& T_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \\
= & f(x_0, y_0, z_0) \\
& + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \\
& + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 \\
& + f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) \\
& + 2f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + 2f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_3(x, y; x_0, y_0) \\
= & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
& + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\
& \quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\
& + \frac{1}{6} (f_{xxx}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) \\
& \quad + 3f_{xyy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)(y - y_0)^3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 13:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3 \Rightarrow f(0, 0, 0) = 1$$

$$f_x(x, y, z) = y + 2x(1 - y)^2 \Rightarrow f_x(0, 0, 0) = 0$$

$$f_y(x, y, z) = x - 2x^2(1 - y) + 3(y + z)^2 \Rightarrow f_y(0, 0, 0) = 0$$

$$f_z(x, y, z) = 1 + 3(y + z)^2 \Rightarrow f_z(0, 0, 0) = 1$$

$$f_{xx}(x, y, z) = 2(1 - y)^2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0, 0) = 2$$

$$f_{xy}(x, y, z) = 1 - 4x(1 - y) \Rightarrow f_{xy}(0, 0, 0) = 1$$

$$f_{xz}(x, y, z) = 0 \Rightarrow f_{xz}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(x, y, z) = 2x^2 + 6(y + z) \Rightarrow f_{yy}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{yz}(x, y, z) = 6(y + z) \Rightarrow f_{yz}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{zz}(x, y, z) = 6(y + z) \Rightarrow f_{zz}(0, 0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2(x, y, z; 0, 0, 0) &= f(0, 0, 0) + f_x(0, 0, 0)x + f_y(0, 0, 0)y + f_z(0, 0, 0)z \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0, 0)x^2 + f_{yy}(0, 0, 0)y^2 + f_{zz}(0, 0, 0)z^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(0, 0, 0)xy + 2f_{xz}(0, 0, 0)xz + 2f_{yz}(0, 0, 0)yz) \\ &= 1 + z + xy + x^2 \end{aligned}$$

Da der Entwicklungspunkt der Nullpunkt ist,

wäre es einfacher gewesen die gegebene Funktion auszumultiplizieren und die Terme oberhalb der quadratischen, dann wegzulassen:

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2 - 2yx^2 + x^2y^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3.$$

b) Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y) = x \sin(x + y)$$

im Entwicklungspunkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x, y) = x \sin(x + y) \quad \Rightarrow \quad f(0, \pi/2) = 0$$

$$f_x(x, y) = \sin(x + y) + x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_x(0, \pi/2) = 1$$

$$f_y(x, y) = x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_y(0, \pi/2) = 0$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{xx}(0, \pi/2) = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = \cos(x + y) - x \sin(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{xy}(0, \pi/2) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = -x \sin(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{yy}(0, \pi/2) = 0$$

$$f_{xxx}(x, y) = -3 \sin(x + y) - x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{xxx}(0, \pi/2) = -3$$

$$f_{xxy}(x, y) = -2 \sin(x + y) - x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{xxy}(0, \pi/2) = -2$$

$$f_{xyy}(x, y) = -\sin(x + y) - x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{xyy}(0, \pi/2) = -1$$

$$f_{yyy}(x, y) = -x \cos(x + y) \quad \Rightarrow \quad f_{yyy}(0, \pi/2) = 0$$

$$\Rightarrow T_3(x, y; 0, \pi/2) = f(0, \pi/2) + f_x(0, \pi/2)x + f_y(0, \pi/2)(y - \pi/2)$$

$$+ \frac{1}{2} (f_{xx}(0, \pi/2)x^2 + 2f_{xy}(0, \pi/2)x(y - \pi/2) \\ + f_{yy}(0, \pi/2)(y - \pi/2)^2)$$

$$+ \frac{1}{6} (f_{xxx}(0, \pi/2)x^3 + 3f_{xxy}(0, \pi/2)x^2(y - \pi/2) \\ + 3f_{xyy}(0, \pi/2)x(y - \pi/2)^2 + f_{yyy}(0, \pi/2)(y - \pi/2)^3)$$

$$= x - x^3/2 - x^2(y - \pi/2) - x(y - \pi/2)^2/2$$

Satz von Taylor:

Ist f $(m + 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar,

so gilt für die **Taylorentwicklung**

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) + R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$$

die folgende **Restgliedformel nach Lagrange**

mit $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}^0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ und $0 < \Theta < 1$

$$R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \frac{1}{(m+1)!} \left(((\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla)^{(m+1)} f \right) (\boldsymbol{\xi})$$

Alternative Darstellung über **Multiindizes**:

$$R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m+1} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\xi})}{\boldsymbol{\alpha}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} R_3(x, y; x_0, y_0) = & +\frac{1}{4!} \left(f_{xxxx}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)^4 \right. \\ & + 4f_{xxyy}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)^3(y - y_0) \\ & + 6f_{xyyy}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)^2(y - y_0)^2 \\ & + 4f_{xyyy}(\xi_1, \xi_2)(x - x_0)(y - y_0)^3 \\ & \left. + f_{yyyy}(\xi_1, \xi_2)(y - y_0)^4 \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 14:

Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades

zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ der folgenden Funktion

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht,

wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ verwendet,

nach oben ab.

Lösung:

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h(0, 0) = 1$$

$$h_x(x, y) = -2x \sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_x(0, 0) = 0$$

$$h_y(x, y) = -2y \sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_y(0, 0) = 0$$

$$h_{xx}(x, y) = -2 \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xx}(0, 0) = 0$$

$$h_{xy}(x, y) = -4xy \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xy}(0, 0) = 0$$

$$h_{yy}(x, y) = -2 \sin(x^2 + y^2) - 4y^2 \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{yy}(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2(x, y; 0, 0) &= h(0, 0) + h_x(0, 0)x + h_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} (h_{xx}(0, 0)x^2 + 2h_{xy}(0, 0)xy + h_{yy}(0, 0)y^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('cos(x^2+y^2)', [-2.5,2.5,-2.5,2.5])
```

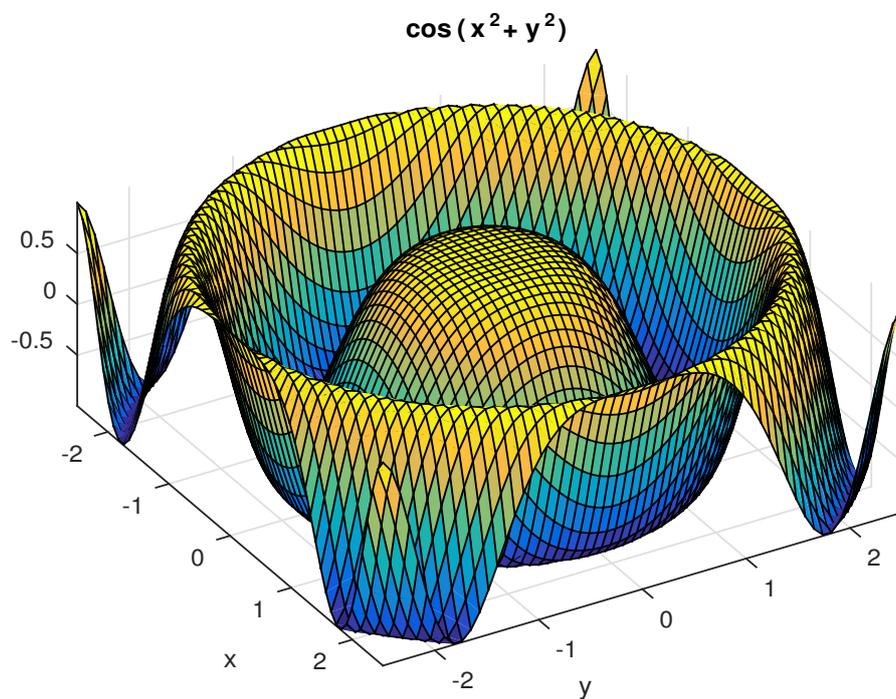


Bild 14: $h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$h_{xxx}(x, y) = -12x \cos(x^2 + y^2) + 8x^3 \sin(x^2 + y^2)$$

$$h_{xxy}(x, y) = -4y \cos(x^2 + y^2) + 8x^2y \sin(x^2 + y^2)$$

$$h_{xyy}(x, y) = -4x \cos(x^2 + y^2) + 8y^2x \sin(x^2 + y^2)$$

$$h_{yyy}(x, y) = -12y \cos(x^2 + y^2) + 8y^3 \sin(x^2 + y^2).$$

Die Fehlerabschätzung für beliebiges $(x, y) \in [0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$

zieht mit $\theta \in]0, 1[$ ein beliebiges

$$(\xi_1, \xi_2) := (0, 0) + \theta(x, y) \in]0, \pi/4[\times]0, \pi/4[$$

nach sich.

Mit der Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} |h(x, y) - T_2(x, y; 0, 0)| &= |R_2(x, y; 0, 0)| \\ &= \frac{1}{3!} |h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)x^3 + 3h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)x^2y + 3h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)xy^2 + h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)y^3| \\ &\leq \frac{1}{3!} (|h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x|^3 + 3|h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x^2y| \\ &\quad + 3|h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |xy^2| + |h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |y^3|). \end{aligned}$$

Jeder der vier Summanden kann nun jeweils noch oben abgeschätzt werden.

Dabei wird $|\sin t| \leq 1$ und $|\cos t| \leq 1$ verwendet.

$$\begin{aligned}
 & |h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x|^3 \\
 &= \left| -12\xi_1 \cos(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 8\xi_1^3 \sin(\xi_1^2 + \xi_2^2) \right| \cdot |x|^3 \\
 &\leq \left(|-12\xi_1| \cdot |\cos(\xi_1^2 + \xi_2^2)| + |8\xi_1^3| \cdot |\sin(\xi_1^2 + \xi_2^2)| \right) \cdot |x|^3 \\
 &\leq \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3
 \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$3 |h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x^2 y| \leq 3 \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$3 |h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x y^2| \leq 3 \left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$|h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |y^3| \leq \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

Insgesamt erhält man also

$$|h(x, y) - T_2(x, y; 0, 0)| \leq \frac{\pi^3}{3!4^3} \left(48 \cdot \frac{\pi}{4} + 64 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \right) = 5.5476\dots$$

Der Maximalfehler wird angenommen für $x = y = \frac{\pi}{4}$.

$$|h\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}; 0, 0\right)| = \left| \cos\left(2 \cdot \frac{\pi^2}{4^2}\right) - 1 \right| = 0.669252\dots$$

Extrema von Funktionen mehrerer Variablen:

Gegeben sei eine Funktion

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definition:

Für $\mathbf{x}^0 \in D$ definiert man:

- a) f besitzt in \mathbf{x}^0 ein **globales Maximum**,
falls $\forall \mathbf{x} \in D$ gilt: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$.
- b) f besitzt in \mathbf{x}^0 ein **lokales Maximum**,
falls ein $\varepsilon > 0$ existiert,
so dass für alle $\mathbf{x} \in D$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon$ gilt: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$.
- c) Kann in a) und b) für $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$
die Ungleichung $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$ durch $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$ ersetzt werden,
so handelt es sich um ein **strenges Maximum** in \mathbf{x}^0 .
- d) Gilt in a) und b) $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ und in c) $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^0)$,
so liegt entsprechend ein **Minimum** in \mathbf{x}^0 vor.
- e) f besitzt in \mathbf{x}^0 ein **Extremum**,
falls es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.
- f) f besitzt in $\mathbf{x}^0 \in D^0$ einen **stationären Punkt**,
falls $\text{grad } f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ gilt.

Satz: (notwendige Bedingung 1. Ordnung)

Sei f in D^0 eine C^1 -Funktion und $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein **lokales Extremum**, dann gilt

$$\operatorname{grad}f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion bezeichnet

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

die **Hessematrix** von f .

Satz: (notwendige Bedingung 2. Ordnung)

Ist f eine C^2 -Funktion und $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt, dann gilt:

- a) Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein **lokales Minimum**, dann ist $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit.
- b) Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein **lokales Maximum**, dann ist $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit.

Satz: (hinreichende Bedingung 2. Ordnung)

Ist f eine C^2 -Funktion und $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt, dann gilt:

- a) Ist $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit, dann ist \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum.
- b) Ist $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ negativ definit, dann ist \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Maximum.
- c) Ist $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, dann ist \mathbf{x}^0 ein **Sattelpunkt**.

Aufgabe 15:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

$$\text{a) } f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2},$$

$$\text{grad } f(x, y) =$$

$$e^{-x^2 - y^2} (2x(1 - x^2 + y^2), 2y(-1 - x^2 + y^2))^T = (0, 0)^T$$

Zur Berechnung der stationären Punkte werden für $f_x(x, y) = 0$ alle Fälle untersucht.

$$\text{1. Fall: } x = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f_y(0, y) = e^{-y^2} 2y(-1 + y^2)$$

$$\Rightarrow y = 0, \quad y = 1, \quad y = -1$$

\Rightarrow stationäre Punkte:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = (0, -1)$$

$$\text{2. Fall: } 1 - x^2 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 + y^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = f_y(x, y) &= e^{-(1+y^2)-y^2} 2y(-1 - (1 + y^2) + y^2) \\ &= -4ye^{-1-2y^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad x = -1$$

\Rightarrow stationäre Punkte: $P_4 = (1, 0), \quad P_5 = (-1, 0)$

$$\mathbf{H}f(x, y) =$$

$$2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1 - 5x^2 + 2x^4 + y^2 - 2x^2y^2 & 2xy(x^2 - y^2) \\ 2xy(x^2 - y^2) & -1 + 5y^2 - 2y^4 - x^2 + 2x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit}$$

$\Rightarrow P_1 = (0, 0)$ ist Sattelpunkt.

$$\mathbf{H}f(0, \pm 1) = 2e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit}$$

$\Rightarrow P_{2,3} = (0, \pm 1)$ sind Minima.

$$\mathbf{H}f(\pm 1, 0) = -2e^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit}$$

$\Rightarrow P_{4,5} = (\pm 1, 0)$ sind Maxima.

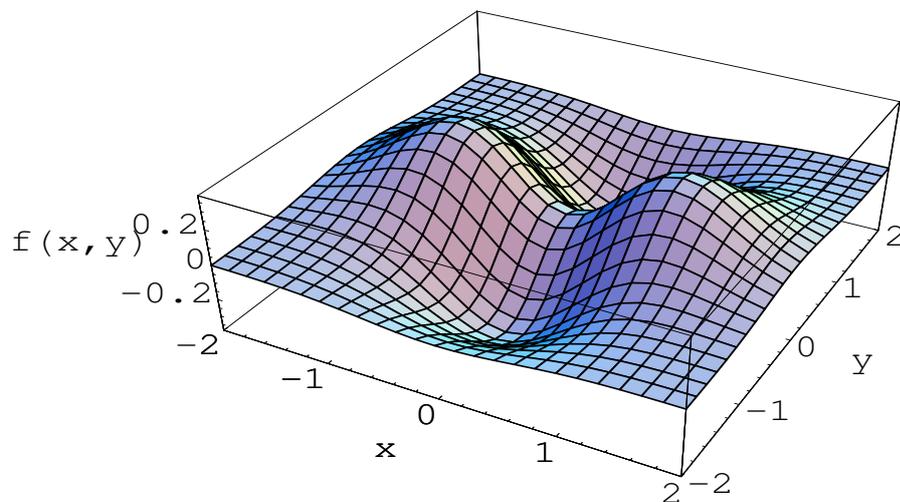


Bild 15 a): $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$

$$\text{b) } f(x, y) = y(y^2 - 3),$$

$$\text{grad } f(x, y) = (0, 3y^2 - 3)^T = (0, 0)^T \Rightarrow y = \pm 1, x \in \mathbb{R}$$

Die stationären Punkte liegen auf den Geraden

$$P_1(x) = (x, 1) \text{ und } P_2(x) = (x, -1).$$

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}f(x, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ist positiv semidefinit}$$

$\Rightarrow P_1(x) = (x, 1)$ sind keine lokalen Maxima.

$$\mathbf{H}f(x, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ ist negativ semidefinit}$$

$\Rightarrow P_2(x) = (x, -1)$ sind keine lokalen Minima.

f ist unabhängig von x ,

d.h. für festes $y = c$ gilt $f(x, c) = \textit{konstant}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Extrema sind also die von $g(y) = y(y^2 - 3)$,

d.h. alle Punkte der Geraden $P_1(x) = (x, 1)$ sind lokale Minima

und für $P_2(x) = (x, -1)$ erhält man lokale Maxima.

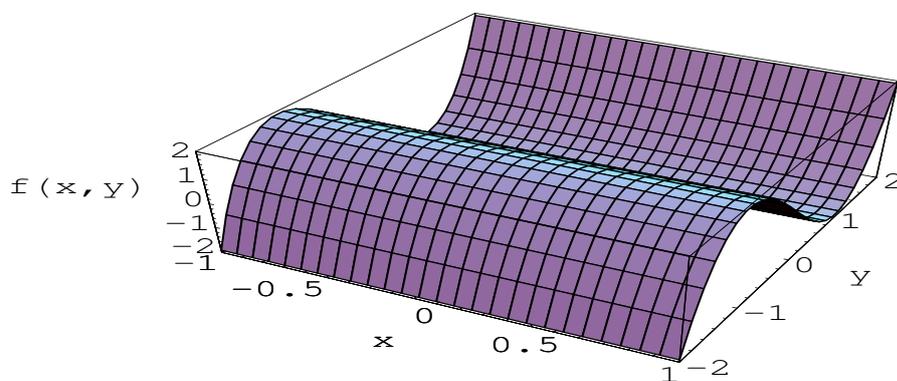


Bild 15 b): $f(x, y) = y(y^2 - 3)$

$$c) f(x, y) = \sin(x^2 + y^2),$$

$$\text{grad } f(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2)(x, y)^T = (0, 0)^T$$

Die stationären Punkte sind also gegeben durch $(0, 0)$ und alle Punkte P , für die $x^2 + y^2 = \pi/2 + n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2) & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit}$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist Minimum.

$$\mathbf{H}f(P) = \begin{pmatrix} -4x^2 \sin(x^2 + y^2) & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & -4y^2 \sin(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ist semidefinit, denn $\det \mathbf{H}f(P) = 0$.

Wir klassifizieren daher anders:

Für die Punkte P auf den Kreisen $x^2 + y^2 = \pi/2 + n\pi$

gilt $\sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$.

Deshalb liegen für gerades n Maxima und für ungerades n Minima auf diesen Kreisen vor.

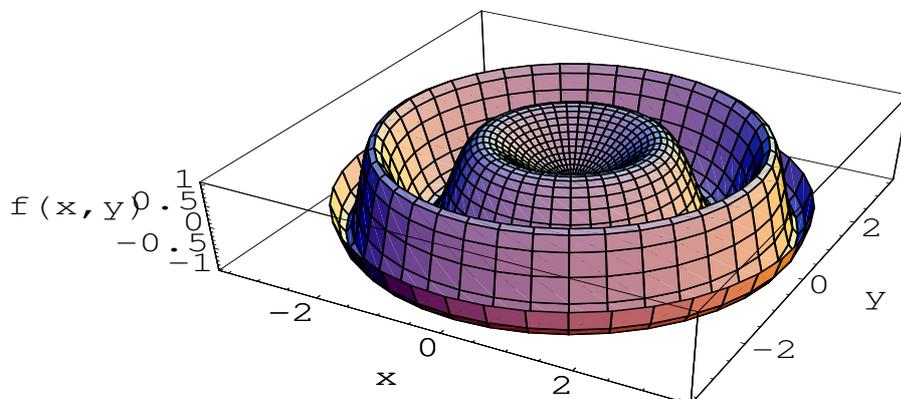


Bild 15 c): $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

$$d) f(x, y) = |x + y|.$$

Für $x + y \neq 0$ ist $f(x, y) = |x + y|$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{cases} (1, 1)^T & , x + y > 0 \\ -(1, 1)^T & , x + y < 0. \end{cases}$$

In den offenen Halbebenen liegen also keine Extrema vor, da die notwendige Bedingung verletzt ist.

Es gilt $f(x, y) = |x + y| \geq 0$ und $f(x, -x) = 0$.

Also nimmt f auf der Geraden

$$y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$$

den global kleinsten Funktionswert an.

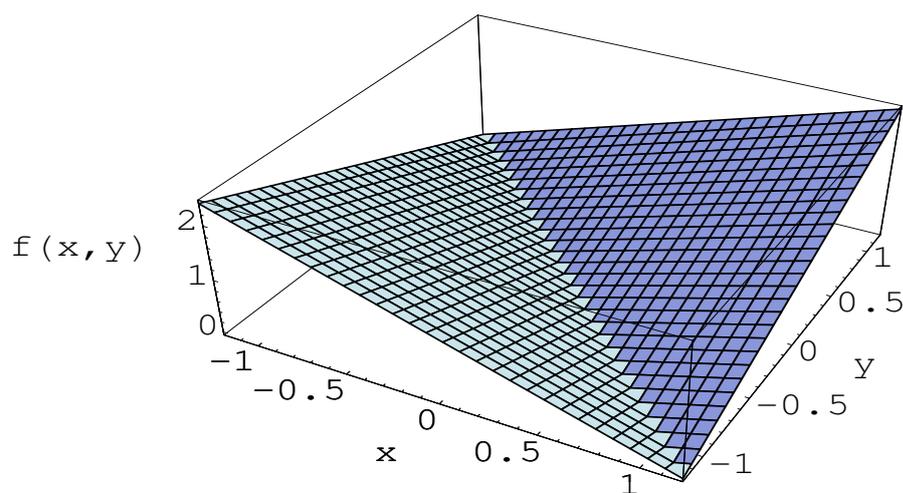


Bild 15 d): $f(x, y) = |x + y|$

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2.$$

a) Man berechne alle stationären Punkte von f .

$$\text{grad } f(x, y) = (4x(8x^2 - 5y), -10x^2 + 6y)^T = 0$$

$$1.\text{Fall: } x = 0$$

$$\Rightarrow 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stationärer Punkt } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$2.\text{Fall: } 8x^2 - 5y = 0$$

$$\Rightarrow y = 8x^2/5 \Rightarrow -10x^2 + 6 \cdot 8x^2/5 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Einzigster stationärer Punkt ist also $(0, 0)$.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

$$\mathbf{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 96x^2 - 20y & -20x \\ -20x & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist positiv semidefinit,

und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar.

Die notwendige Bedingung 2. Ordnung lässt für den stationären Punkt

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

- c) Man weise nach, dass f im Ursprung
längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0, y) = 3y^2.$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 8x^4 - 10ax^3 + 3a^2x^2$$

beschrieben.

Für $a = 0$ wird h in $x = 0$ minimal.

Für $a \neq 0$ erhält man in $x = 0$ auch ein Minimum, denn es gilt

$$h'(x) = 32x^3 - 30ax^2 + 6a^2x \quad \Rightarrow \quad h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 96x^2 - 60ax + 6a^2 \quad \Rightarrow \quad h''(0) = 6a^2 > 0.$$

- d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$\begin{aligned} p(x) &:= f(x, ax^2) = 8x^4 - 10ax^4 + 3a^2x^4 \\ &= x^4(3a^2 - 10a + 8) = x^4(a - 2)(3a - 4). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4x^3(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p'(0) = 0 \\ p''(x) &= 12x^2(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p''(0) = 0 \\ p'''(x) &= 24x(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p'''(0) = 0 \\ p''''(x) &= 24(a - 2)(3a - 4) \Rightarrow p''''(0) = 24(a - 2)(3a - 4). \end{aligned}$$

Für $a \in]4/3, 2[$ ist $p''''(0) < 0$
und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor.

Für $a \notin [4/3, 2]$ ist $p''''(0) > 0$
und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor.

Bei dem stationären Punkt $(0, 0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

Hätte man gewusst, dass

$$f(x, y) = (2y - 3x^2)^2 - (y - x^2)^2$$

gilt, hätte man auf der Ursprungsparabel

$$2y - 3x^2 = 0$$

in $x = 0$ sofort ein Maximum

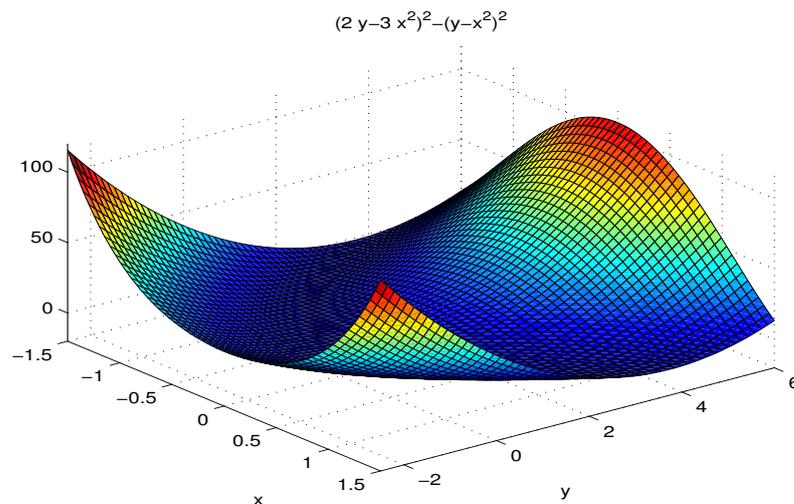
und auf

$$y - x^2 = 0$$

in $x = 0$ sofort ein Minimum erkannt

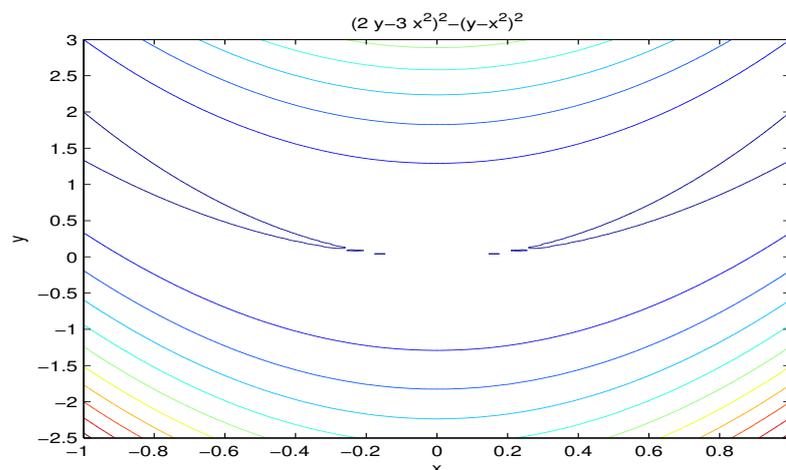
und hätte dann sofort auf den Sattelpunkt schließen können.

- e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.



`ezsurf('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2', [-1.5,1.5,-2.5,6])`

Bild 16 a) $f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$



`ezcontour('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2', [-1,1,-2.5,3])`

Bild 16 b) $f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$