Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Differentiationsregeln von Abbildungen:

Linearität:

Gegeben seien zwei Funktionen $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei D offen ist und $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Sind $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{x}_0$ differenzierbar, dann ist auch die Linearkombination $\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{x}_0$ differenzierbar.

Für die Jacobi-Matrix der Linearkombination gilt

$$\boldsymbol{J}(\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}_0) = \alpha\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \beta\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Hintereinanderausführung von Funktionen:

Gegeben sei eine Funktion $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

und eine Funktion $\boldsymbol{g} : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Für $\boldsymbol{f}(D) \subset E$ wird die Hintereinanderausführung von $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ erklärt durch

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^k\,, \quad (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\\ \mathbb{R}^m\end{array} \arrow[dr, "\boldsymbol{g}"] & \\
\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_0\\ \mathbb{R}^n\end{array} \arrow[ur, "\boldsymbol{f}"] \arrow[rr, "\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}"] & & \begin{array}{c}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\\ \mathbb{R}^k\end{array}
\end{tikzcd}$$

Satz: (Kettenregel)

Ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{y}^0 := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$ total differenzierbar, so ist $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ total differenzierbar und es gilt

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\,.$$

Beispiel:

$$w:\ \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{\Phi}}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\tilde{w}}{\to} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \mapsto \tilde{w}(u,v) = w(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}w &= (w_x, w_y) = \boldsymbol{J}(\tilde{w}\circ\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{J}\tilde{w}\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{\Phi} = (\tilde{w}_u, \tilde{w}_v)\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\
&= (\tilde{w}_u u_x + \tilde{w}_v v_x\ ,\ \tilde{w}_u u_y + \tilde{w}_v v_y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_2}{\to} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} \mapsto r\cos(s^2)\,.$$

b)
$$\boldsymbol{g}:\ \mathbb{R}^3 \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}\,.$$

Lösung:

a) Kettenregel:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_2(r,s) = \begin{pmatrix} \cos(s^2)\,, & -2rs\sin(s^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}_2 \circ \boldsymbol{f}_1)(x,y) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos((x^3)^2)\,, & -2ye^x x^3 \sin((x^3)^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt: $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) = \boldsymbol{f}_2(r(x,y)), s(x,y)) = \boldsymbol{f}(x,y) = ye^x\cos(x^6)$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix}$

b) Kettenregel:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_2(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2u+v} & e^{2u+v} \\ 3u^2v & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1)(x,y,z) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_1(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2\sin(2yz)+x^2} & e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 3(\sin(2yz))^2x^2 & (\sin(2yz))^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt:

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) = \boldsymbol{g}_2(u(x,y,z),v(x,y,z)) = \boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3\sin(2yz) \\ e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ \sin^3(2yz)\cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung:

Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen und ein Richtungsvektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$.

Die **Ableitung von f in $\boldsymbol{x}^0$ längs der Richtung $\boldsymbol{h}$** wird folgendermaßen definiert:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^0)}{t} .$$

Gilt $||\boldsymbol{h}|| = 1$, so gibt $D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0)$ den **Anstieg** von f an der Stelle $\boldsymbol{x}^0$ in Richtung $\boldsymbol{h}$ an.

Für $\boldsymbol{h} = (0, ..., 0, \overset{i.teK.}{1}, 0, ...0)$ gilt $D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$.

Ist f in $\boldsymbol{x}^0$ total differenzierbar, so kann die Richtungsableitung auch berechnet werden durch

$$D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{h} .$$

Aufgabe 10:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ in den durch die Gerade $3y - 5x = 7$ gegebenen Richtungen.

Lösung:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, kann die Richtungsableitung folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{h} = (y_0, x_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = y_0 h_1 + x_0 h_2$$

Die Gerade $3y - 5x = 7$ in Parameterform lautet:

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 7/3 + 5x/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\boldsymbol{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\boldsymbol{h} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}/3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ lautet daher

$$D_{\boldsymbol{h}} f(1, -1) = -h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}} \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{34}} .$$

Koordinatentransformation:

Definition:

Gegeben seien die C^1-Funktion $\boldsymbol{\Phi}$ und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit

$$\boldsymbol{\Phi} : U \to V \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$$

$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$ und $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = (\Phi_1(\boldsymbol{u}), \Phi_2(\boldsymbol{u}), \cdots, \Phi_n(\boldsymbol{u}))^T$.

Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J\Phi}(\boldsymbol{u}^0)$ sei regulär für jedes $\boldsymbol{u}^0 \in U$ und es existiere eine C^1-Umkehrfunktion $\boldsymbol{\Phi}^{-1} : V \to U$.

Dann wird $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ als **Koordinatentransformation** von den Koordinaten $\boldsymbol{u}$ auf die Koordinaten $\boldsymbol{x}$ bezeichnet.

Beispiele:

a) **Polarkoordinaten:** $\boldsymbol{u} = (r, \varphi)^T$ mit $0 < r$ und $-\pi < \varphi < \pi$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die **Kreisgleichung**

$$x^2 + y^2 = R^2$$

beschreibt den Rand K einer Kreisscheibe mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0)$. K kann mit $R = r$ durch Polarkoordinaten dargestellt werden.

Die **Ellipsengleichung**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt den Rand E einer Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt $(0, 0)$. E kann durch $(x, y) = (a\cos(\varphi), b\sin(\varphi))$ dargestellt werden.

b) **Zylinderkoordinaten:** $\boldsymbol{u} = (r, \varphi, z)^T$ mit $0 < r$, $-\pi < \varphi < \pi$, $z \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

c) **Kugelkoordinaten:** $\boldsymbol{u} = (r, \varphi, \theta)^T$ mit $0 < r$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

beschreibt eine Vollkugel K mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
Mit $0 \leq r \leq R$ kann K durch Kugelkoordinaten dargestellt werden.

Aufgabe 11:

a) Man zeichne folgende Kreise und Ellipsen

(i) $x^2 + y^2 = 3$,

(ii) $4x^2 + 9y^2 = 36$,

(iii) $16x^2 + 3y^2 + 6y + 3 = 48$,

(iv) $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25$.

und stelle die (x, y) der Lösungsmengen der obigen Gleichungen jeweils unter Verwendung von Polarkoordinaten dar.

b) Man zeichne die Lösungsmengen folgender Bereiche im $\mathbb{R}^3$

(i) $x \le 0,\ x^2 + y^2 \le 4$ und $1 \le z \le 3$,

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 \le 16\ ,\ 0 \le y$.

und stelle sie durch Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten dar.

Lösung:

a) (i) $x^2 + y^2 = 3$

beschreibt einen Kreis

vom Radius $r = \sqrt{3}$

mit Mittelpunkt $(0, 0)$

$(x, y) = (\sqrt{3}\cos(\varphi), \sqrt{3}\sin(\varphi))$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

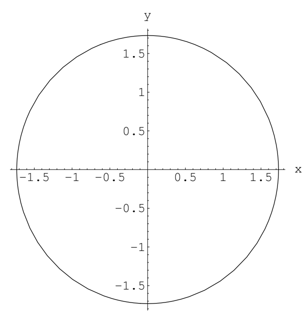

Bild 11.1 Kreis $x^2 + y^2 = 3$

(ii) $4x^2 + 9y^2 = 36$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

beschreibt eine Ellipse

mit den Halbachsen

$a = 3$ und $b = 2$

um $(0, 0)$

$(x, y) = (3\cos(\varphi), 2\sin(\varphi))$

mit $-\pi \le \varphi < \pi$

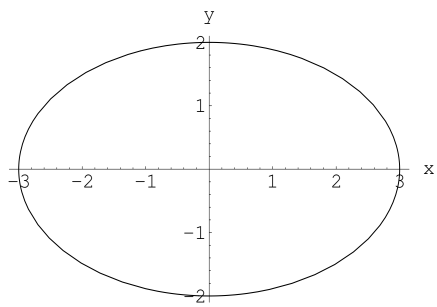

Bild 11.2 Ellipse $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

(iii) Durch quadratische Ergänzungen ergibt sich

$16x^2 + 3y^2 + 6y + 3$
$= 16x^2 + 3(y+1)^2 = 48$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y+1)^2}{4^2} = 1$

Dies ist eine Ellipse

um den Mittelpunkt $(0, -1)$

mit den Halbachsen
$a = \sqrt{3}$ und $b = 4$

$(x, y) = (\sqrt{3}\cos(\varphi), 4\sin(\varphi) - 1)$

mit $-\pi \leq \varphi < \pi$

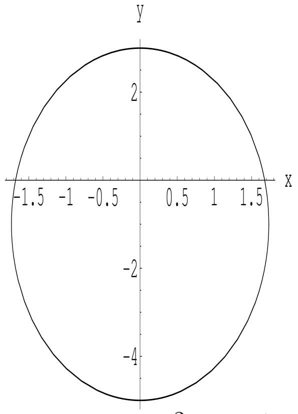

Bild 11.3 Ellipse $\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y+1)^2}{4^2} = 1$

(iv) Durch quadratische Ergänzung ergibt sich

$x^2 - 6x + 9 + y^2$
$= (x-3)^2 + y^2 = 5^2.$

Dies ist ein Kreis um den Mittelpunkt $(3, 0)$ mit Radius $r = 5$

$(x, y) = (5\cos(\varphi) + 3, 5\sin(\varphi))$

mit $-\pi \leq \varphi < \pi$

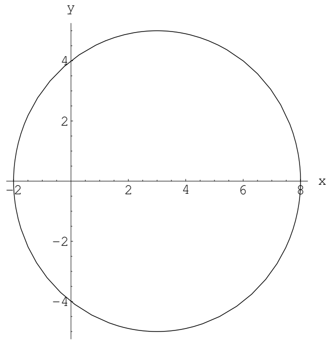

Bild 11.4 Kreis $(x-3)^2 + y^2 = 5^2$

b) (i) $x \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4$ und $1 \leq z \leq 3$,

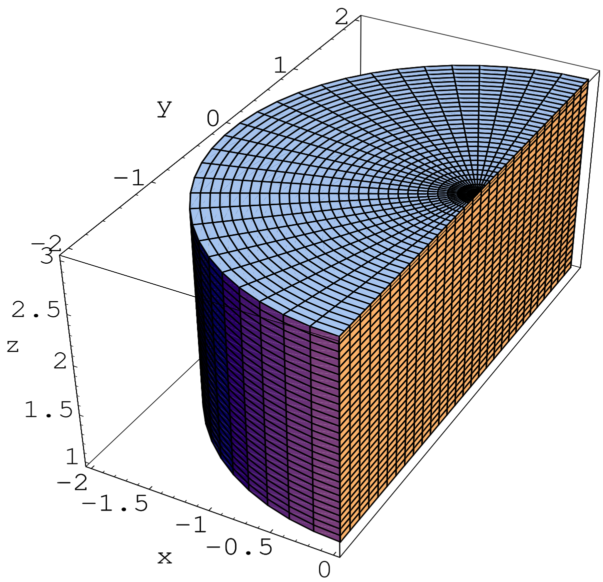

Bild 11.5 halber Zylinder Z

Zylinderkoordinaten für Z: $\boldsymbol{u} = (r, \varphi, z)^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, z)$$

mit $\quad 0 \leq r \leq 2\,, \quad \dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{2}\,, \quad 1 \leq z \leq 3$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\,,\ 0 \leq y.$

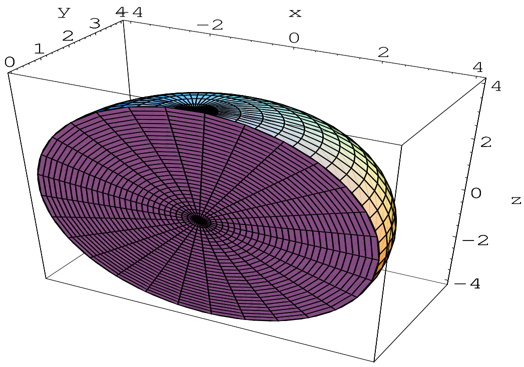

Bild 11.6 Halbkugel H

Kugelkoordinaten für H: $\quad \boldsymbol{u} = (r, \varphi, \theta)^T$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit $\quad 0 \leq r \leq 4\,, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi\,, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

mit $(x,y) \in Q := [-1,1] \times [-1,1]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

b) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man zeichne Q und $\boldsymbol{\Phi}(Q)$.

Lösung:

a)

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ist eine lineare Transformation, genauer sogar eine Drehstreckung um 45° mit dem Faktor $\sqrt{2}$, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{J\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y)) = 2$$

b)

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+v)/2 \\ (v-u)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{J\Phi})^{-1},$$

$\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)) = 1/2$

c)

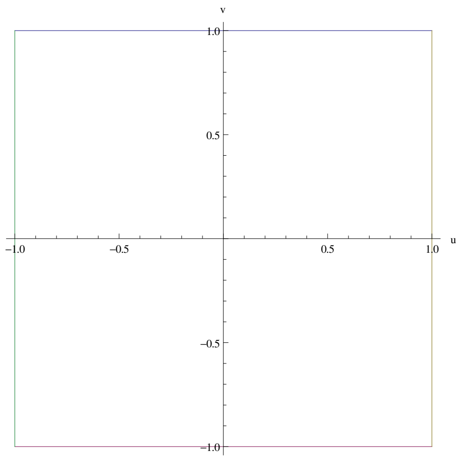

Bild 12 a: Q

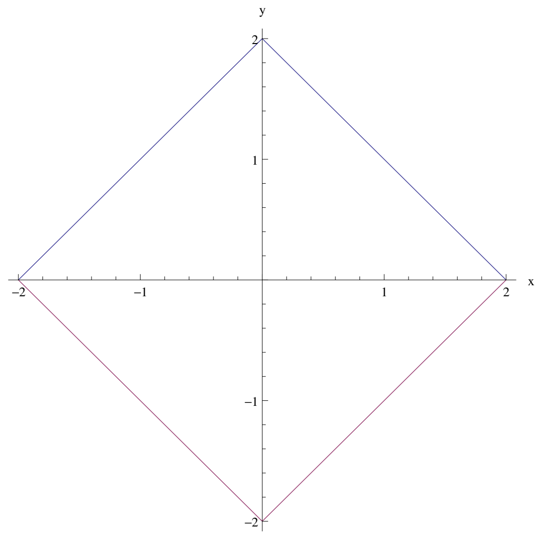

Bild 12 b: $\mathbf{\Phi}(Q)$