Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Differentialoperatoren für vektorwertige Funktionen:

Nabla-Operator ∇: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{mit} \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^T = (\text{grad} f(\boldsymbol{x}))^T$$

Divergenz für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ im $\mathbb{R}^n$:

$$\text{div}\ \boldsymbol{f} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,\quad \varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{div}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha\ \text{div}\boldsymbol{f} + \beta\ \text{div}\boldsymbol{g}\,,\quad \text{div}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi, \boldsymbol{f}) + \varphi\ \text{div}\boldsymbol{f}$$

Rotation im $\mathbb{R}^3$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} , \quad \text{rot } \boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 , \quad \varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{rot}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \text{ rot}\boldsymbol{f} + \beta \text{ rot}\boldsymbol{g} , \quad \text{rot}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{f} + \varphi \text{ rot}\boldsymbol{f}$$

Rotation im $\mathbb{R}^2$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T$$

ergibt sich aus der 3-ten Komponente der Rotation der Einbettung

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(x,y,z) = (u(x,y), v(x,y), 0)^T$$

des Vektorfeldes in den $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \tilde{\boldsymbol{g}}(x,y,z) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T = (0, 0, v_x - u_y)^T$$

Also rot $\boldsymbol{g} := v_x - u_y$.

Aufgabe 5:

Man berechne Divergenz und Rotation für folgende Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$,

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$,

c) $3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y)$,

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$,

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$,

f) $\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z)$.

Lösung:

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$

$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = f_{1x} + f_{2y} = e^y + x^2$
$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = f_{2x} - f_{1y} = 2xy - xe^y$

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$

$\mathrm{div}\boldsymbol{g} = g_{1x} + g_{2y} = 3x^2 + \cos y$
$\mathrm{rot}\boldsymbol{g} = g_{2x} - g_{1y} = 0$

c) $\mathrm{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\mathrm{div}\boldsymbol{f} - \mathrm{div}\boldsymbol{g}$
$= 3(e^y + x^2) - (3x^2 + \cos y) = 3e^y - \cos y$

$\mathrm{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\mathrm{rot}\boldsymbol{f} - \mathrm{rot}\boldsymbol{g}$
$= 3(2xy - xe^y) - 0 = 6xy - 3xe^y$

alternativ:
$3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y) = (3xe^y - x^3, 3x^2y - \sin y)^T$

$\mathrm{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3e^y - 3x^2 + 3x^2 - \cos y = 3e^y - \cos y$
$\mathrm{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 6xy - 3xe^y$

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$

$\mathrm{div}\boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\mathrm{rot}\boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\boldsymbol{v}$ mit $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man erhält

$\nabla\varphi = (2x, 2y, 2z)^T$, $\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und
$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$.

Damit ergibt sich

$\mathrm{div}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) = 2x + 2y + 2z$

$\mathrm{rot}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi\ \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$.

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$

$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (-2y + 2z, -2z + 2x, -2x + 2y)$

f) $\mathrm{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}\boldsymbol{h} + \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 2(2x + 2y + 2z)$

$\mathrm{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{h} + \mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z) = (2x^2, 2y^2, 2z^2)$

$\mathrm{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (h_1 + u_1)_x + (h_2 + u_2)_y + (h_3 + u_3)_z = 4x + 4y + 4z$

$\mathrm{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0)^T = \boldsymbol{0}$

Stromlinien im $\mathbb{R}^2$ für das Vektorfeld

$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)^T$ sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind, d.h.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

oder alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

Aufgabe 6:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x, -y)^T .$$

a) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

b) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1,1] \times [-1,1]$.

Lösung:

a) $\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x, -y)^T$

div $\boldsymbol{g} = u_x + v_y = 1 - 1 = 0$,

rot $\boldsymbol{g} = v_x - u_y = 0 - 0 = 0$

b) Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
U=X.^1;
V=-Y.^1;
quiver(X,Y,U,V)
```

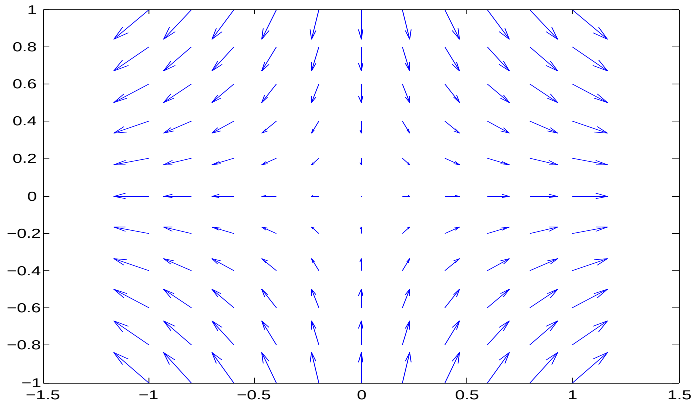

Bild 6 b) (i) Vektorfeld $\boldsymbol{g}(x,y) = (x,-y)^T$

Stromlinien sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{ab}{x} \end{pmatrix}$$

oder alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{x}$$

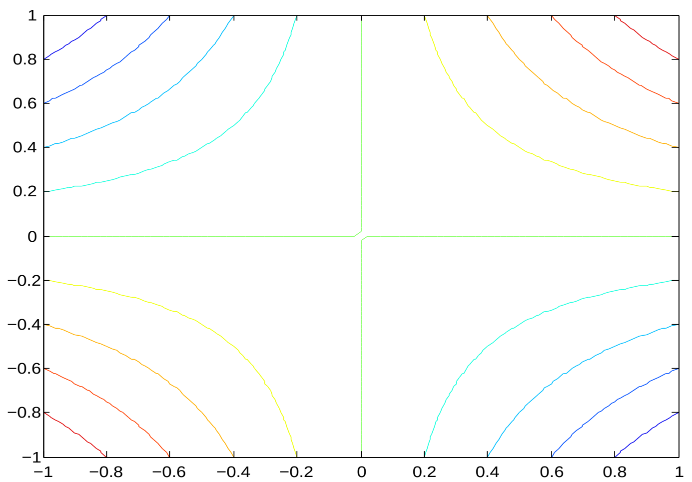

Bild 6 b) (ii) Stromlinien $\mathbf{c}(x) = (x, c/x)^T$, $c \in \mathbb{R}$, (Höhenlinien von $xy = c$)

Totale Differenzierbarkeit:

Gegeben sei die Funktion

$$\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

D offen, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots , x_n)^T$ und $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, , \cdots , f_m)^T$.

Definition:

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ heißt in $\boldsymbol{x}^0 \in D$ **(vollständig,total) differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$\boldsymbol{I}(x, x_0) := \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)$$

mit einer zugehörigen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(m,,n)}$ gibt, für die gilt

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0||} = \mathbf{0}\,.$$

$\boldsymbol{I}$ heißt das **(vollständige,totale) Differential** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ und wird mit $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0)$ bezeichnet.

Die zugehörige Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt dann **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** und wird mit $\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^0)$ oder auch $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)$ bezeichnet.

Definition:

Existieren alle partiellen Ableitungen der Komponenten von $\boldsymbol{f}$ und sind diese stetig, so heißt $\boldsymbol{f}$ **stetig partiell differenzierbar** oder C^1**-Funktion** in D.

Satz:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

a) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}^0$, so gilt

$$\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \end{pmatrix}$$

b) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}^0$, so ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ stetig.

c) Ist $\boldsymbol{f}$ auf D stetig partiell differenzierbar, so ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar auf D.

Aufgabe 7:

Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

a) $f(x,y) = \ln(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

c) $\boldsymbol{h}(\varphi,\psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$ und $\varphi,\psi \in \mathbb{R}$,

d) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-3x+y, x-3y+z, y-3z)^T$ und $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) $f(x,y) = \ln(y) + \cos(xy)$,

$$\boldsymbol{J}f(x,y) = (f_x, f_y) = \ \mathrm{grad} f(x,y) = \left(-y\sin(xy), \frac{1}{y} - x\sin(xy)\right)$$

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))^T = \boldsymbol{g}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^T$$

c) $\boldsymbol{h}(\varphi,\psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} h_{1\varphi} & h_{1\psi} \\ h_{2\varphi} & h_{2\psi} \\ h_{3\varphi} & h_{3\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi\cos\psi & -2\cos\varphi\sin\psi \\ 2\cos\varphi\cos\psi & -2\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & 2\cos\psi \end{pmatrix}$$

d) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-3x+y, x-3y+z, y-3z)^T$, und $x,y,z \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} & \text{, falls } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } \quad (x,y) = (0,0) \,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man berechne die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

c) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Lösung:

a)

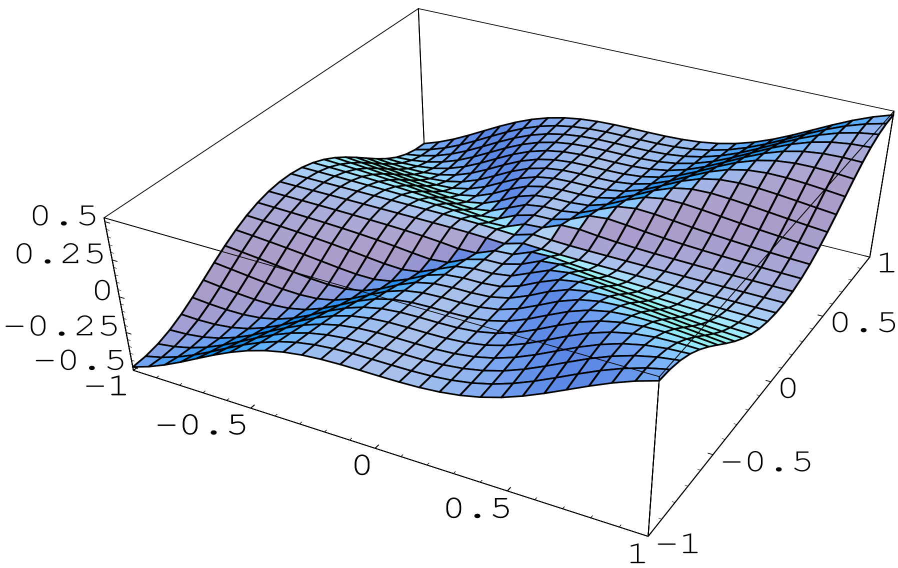

Bild 8: $\quad f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}$

b) Wegen der Nennernullstelle von f in $(x_0, y_0) = (0,0)$ können wir dort keine Differenzierbarkeit voraussetzen, d.h. die partiellen Ableitungen müssen elementar über die Definition berechnet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3 \cdot 0^2}{t^4 + 0^4} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0^3 \cdot t^2}{0^4 + t^4} - 0}{t} = 0$$

c) Wäre f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (vollständig) differenzierbar, so würde eine lineare Abbildung $\boldsymbol{A}$ existieren, mit

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = 0 \, .$$

$\boldsymbol{A}$ wäre dann die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0) \, .$$

Damit ergibt sich beispielsweise für die Nullfolge $\boldsymbol{x}_n = (1/n, 1/n)^T$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n}{||\boldsymbol{x}_n||} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n^5}{2/n^4 \sqrt{2/n^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \, .$$

Also ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.