Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Funktionen in mehreren Variablen

Definition:

Eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, heißt in $\boldsymbol{x}^0 := (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ **partiell differenzierbar nach** x_i, falls folgender Grenzwert existiert:

$$
\begin{aligned}
f_{x_i}(\boldsymbol{x}^0) \;&:=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h} \\
&=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}\,.
\end{aligned}
$$

f heißt **partiell differenzierbar**, falls in jedem Punkt von D alle partiellen Ableitungen existieren.

Sind diese auch noch stetig so heißt f **stetig partiell differenzierbar** oder auch C^1**-Funktion**.

Gradient: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right)$

Höhere Ableitungen:

werden wie in $\mathbb{R}$ rekursiv definiert, z.B.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Höhenlinien: (Spezialfall einer Niveaumenge im $\mathbb{R}^n$) Linien, auf denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstant ist, also die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c \text{ für } c \in \mathbb{R}\}.$$

Im 'Satz über implizite Funktionen' wird geklärt, wann sich eine Funktion hinter dieser Forderung verbirgt.

Bei einer Parametrisierbarkeit durch x wäre $y(x)$ die Funktion und es würde $f(x, y(x)) = konst$ gelten.

Der Funktionsgraph von $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ wird im $\mathbb{R}^2$ durch die Kurve $\mathbf{c}(x) = (x, y(x))^T$ beschrieben.

Der zugehörige Tangentialvektor lautet $\mathbf{c}'(x) = (1, y'(x))^T$.

Funktionsgraph von $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
('Fläche' im $\mathbb{R}^3$)

$$\mathrm{graph}(f) := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \, , \; z = f(x, y) \; \right\}$$

Tangentialebene:

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Als Parameterform kann der Funktionsgraph gewählt werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad} f(x, y) = (10x, -6y)^T$

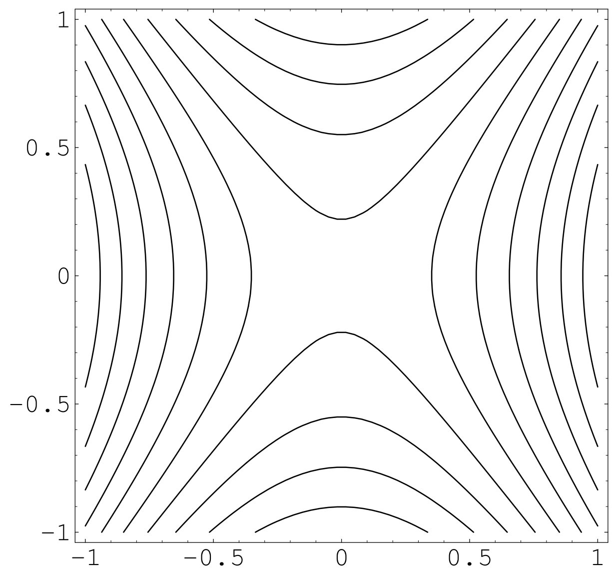

Bild 1 a) $5x^2 - 3y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = 5x + 3y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (5,3)^T$

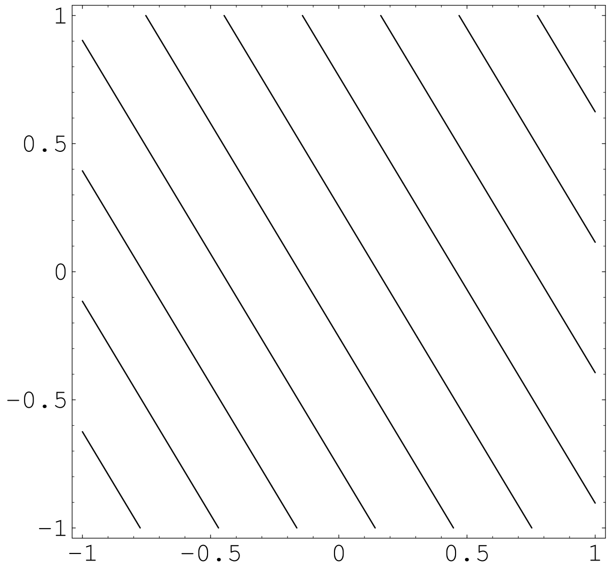

Bild 1 b) $5x + 3y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (10x, 6y)^T$

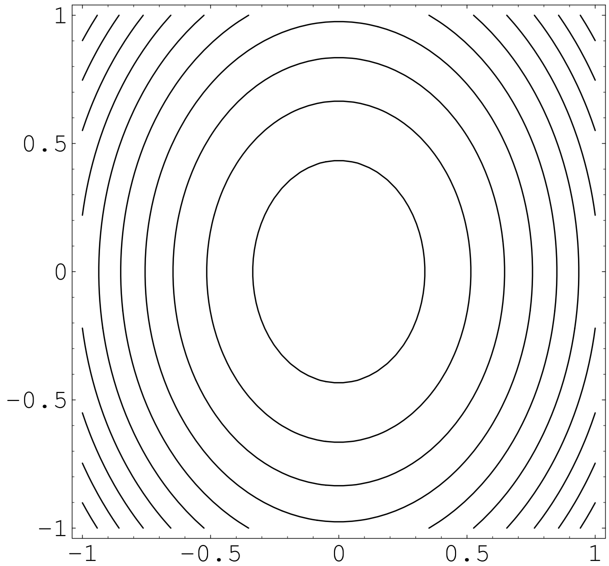

Bild 1 c) $5x^2 + 3y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

d) $f(x,y) = \sin(6x) + 2y \quad \Rightarrow$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (6\cos(6x), 2)^T$$

Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('sin(6*x)+2*y',[-1,1,-1,1])
```

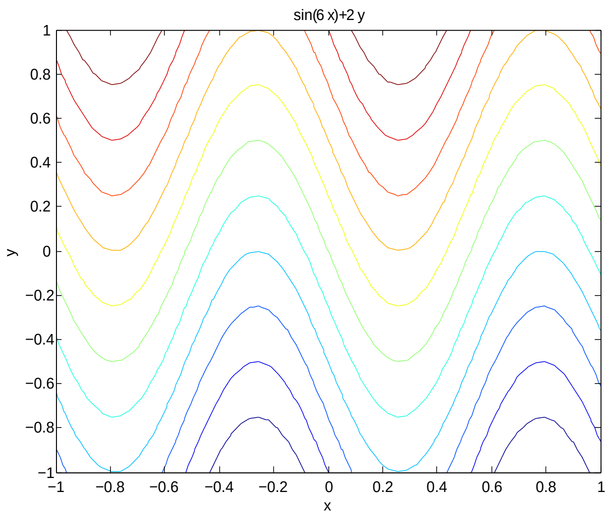

Bild 1 d) $\sin(6x) + 2y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - 4y$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

$$f(x, y) = x^2 - 4y \,, \quad f_x(x, y) = 2x \,, \quad f_y(x, y) = -4 \,,$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \,, \quad f_{xy}(x, y) = 0 \,, \quad f_{yy}(x, y) = 0 \,,$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0 \,, \quad f_{xxy}(x, y) = 0 \,,$$

$$f_{xyy}(x, y) = 0 \,, \quad f_{yyy}(x, y) = 0$$

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4, 4] \times [-2, 2]$.

Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('x^2-4*y',[-4,4,-2,2])
```

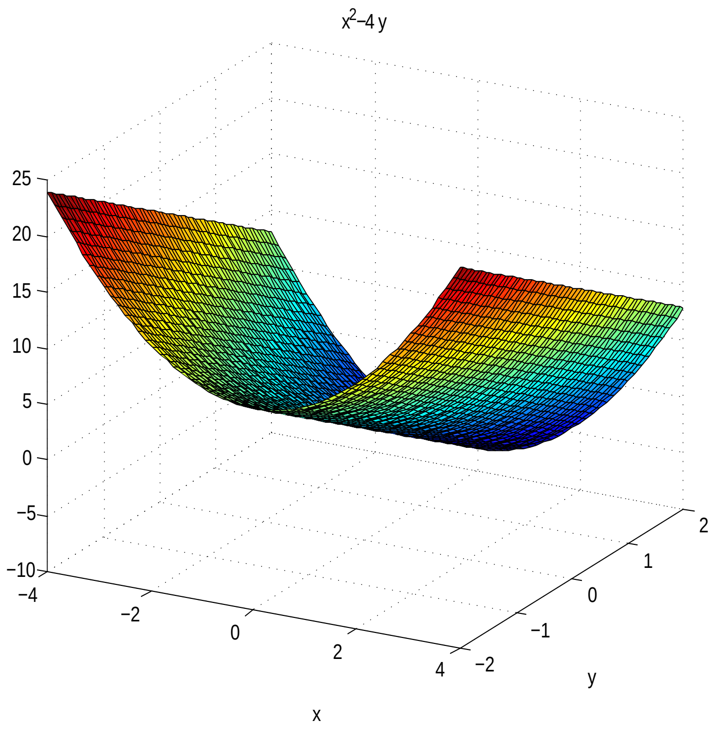

Bild 2 $f(x, y) = x^2 - 4y$

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

$$f(x,y) = x^2 - 4y\ , \quad f_x(x,y) = 2x\ , \quad f_y(x,y) = -4\ ,$$

$$f(2,0) = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4\ , \quad f_x(2,0) = 4\ , \quad f_y(2,0) = -4$$

Tangentialebene:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tangentialebene : $\quad z = 4 + 4(x - 2) - 4y$

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2, 0)$ läuft.

Es ist $f(2, 0) = 4$.

Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(2, 0)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$4 = f(x, y(x)) = x^2 - 4y(x)\,.$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$. Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x^2}{4} - 1 \end{pmatrix}\,.$$

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\mathrm{grad} f(2,0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2,0)$.

$$\mathrm{grad} f(2,0) = (f_x(2,0), f_y(2,0))^T = (4,-4)^T$$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{grad} f(2,0)^T \cdot \mathbf{c}'(2)}{||\mathrm{grad} f(2,0)||_2 \cdot \ ||\mathbf{c}'(2)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

Man betrachte die Nullfolge $\left(\dfrac{1}{k}, 0\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{1/k^4} = 0 \neq 1\,.$$

Die Funktion f ist im Nullpunkt daher nicht stetig.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-5,5] \times [-20,20]$.

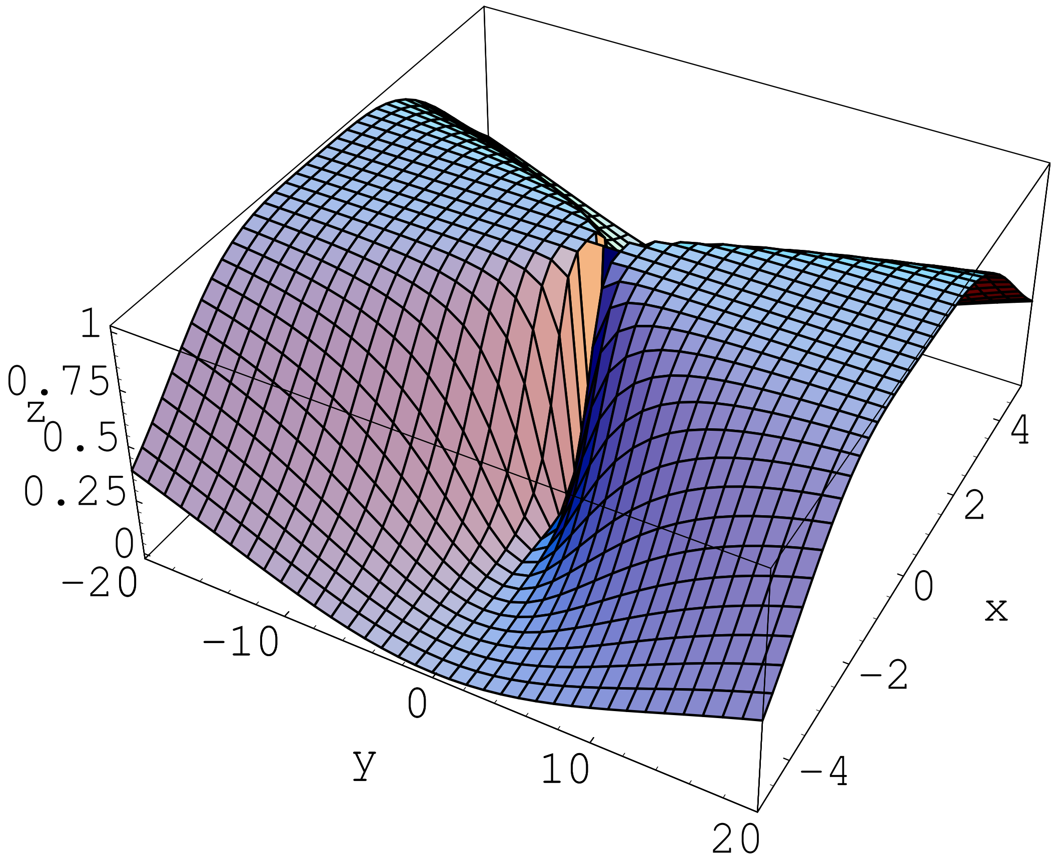

Bild 3: $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^4+y^2}$

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{-4y^2x^3}{(x^4+y^2)^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^4+y^2)^2}$$

für $(x,y) = (0,0)$ gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-1}{h} \quad \text{existiert nicht}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

d) Man überprüfe, ob die ersten partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt stetig sind.

Man betrachte die Nullfolge

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$$

mit $k \in \mathbb{N}$, um zu überprüfen, ob die partielle Ableitung

$$f_y(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^4+y^2)^2}$$

im Nullpunkt unstetig ist.

$$\lim_{k\to\infty} f_y\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{2/k^6}{(1/k^4+1/k^4)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{2} = \infty$$

Damit ist die partielle Ableitung f_y im Nullpunkt nicht stetig.

Differentialoperatoren für reellwertige Funktionen:

Nabla-Operator: $\nabla := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$,

Laplace-Operator: $\Delta := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

Beispiele für partielle Differentialgleichungen:

Wellengleichung:	$u_{tt} = \Delta u$
Wärmeleitungsgleichung:	$u_t = \Delta u$
Laplace-Gleichung:	$\Delta u = 0$

Dabei bezieht sich Δu nur auf die Ortsvariablen x und y von u, für $n = 2$ bedeutet dies beispielsweise $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion

$$u(x, y, t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$

gelöst wird.

$$u_t(x, y, t) = -5\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$

$$u_x(x, y, t) = \cos(x)\sin(2y)e^{-5t} ,$$

$$u_y(x, y, t) = 2\sin(x)\cos(2y)e^{-5t}$$

$$u_{xx}(x, y, t) = -\sin(x)\sin(2y)e^{-5t} ,$$

$$u_{yy}(x, y, t) = -4\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$

Damit löst u die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

$$u_x(x,y) = n(\cos(nx) - 2\sin(nx))\sinh(ny)\ ,$$

$$u_y(x,y) = n(\sin(nx) + 2\cos(nx))\cosh(ny)$$

$$u_{xx}(x,y) = -n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)\ ,$$

$$u_{yy}(x,y) = n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$.