**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2023/24**
Dr. K. Rothe

# Analysis III

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

# Funktionen in mehreren Variablen

**Definition:**

Eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D$ offen, heißt in $\boldsymbol{x}^0 := (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ **partiell differenzierbar nach** $x_i$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} f_{x_i}(\boldsymbol{x}^0) &:= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} . \end{aligned}$$

$f$ heißt **partiell differenzierbar**, falls in jedem Punkt von $D$ alle partiellen Ableitungen existieren. Sind diese auch noch stetig so heißt $f$ **stetig partiell differenzierbar** oder auch $C^1$**-Funktion**.

**Gradient:** $\quad \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}^0) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \right)$

**Höhere Ableitungen:**

werden wie in $\mathbb{R}$ rekursiv definiert, z.B.: $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

**Höhenlinien:** (Spezialfall einer Niveaumenge im $\mathbb{R}^n$)

Linien, auf denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstant ist, also $f(x, y) = konst!$ gilt.

Im 'Satz über implizite Funktionen' wird geklärt, wann sich eine Funktion hinter dieser Forderung verbirgt. Bei einer Parametrisierbarkeit durch $x$ wäre $y(x)$ die Funktion und es würde $f(x, y(x)) = konst$ gelten.

Der Funktionsgraph von $y\ :]a, b[\to \mathbb{R}$ wird im $\mathbb{R}^2$ durch die Kurve $\mathbf{c}(x) = (x, y(x))^T$ beschrieben. Der zugehörige Tangentialvektor lautet $\mathbf{c}'(x) = (1, y'(x))^T$.

**Funktionsgraph von $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:** ('Fläche' im $\mathbb{R}^3$)

$\mathrm{graph}(f) := \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\,,\ z = f(x, y)\ \right\}$

**Tangentialebene:**

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f$ im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Als Parameterform kann der Funktionsgraph gewählt werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

**Aufgabe 1:**

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$ , b) $f(x, y) = 5x + 3y$ ,

c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$ , d) $f(x, y) = \sin(6x) + 2y$ .

**Lösung:**

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x, y) = (10x, -6y)^T$

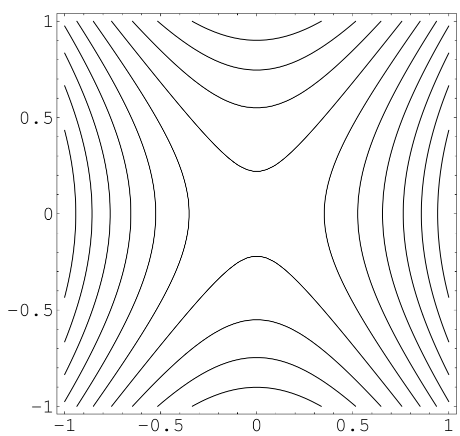


**Bild 1 a)** $5x^2 - 3y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = 5x + 3y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x,y) = (5,3)^T$

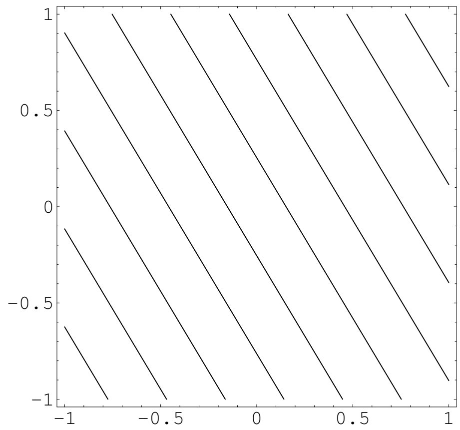


**Bild 1 b)** $5x + 3y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x,y) = (10x, 6y)^T$

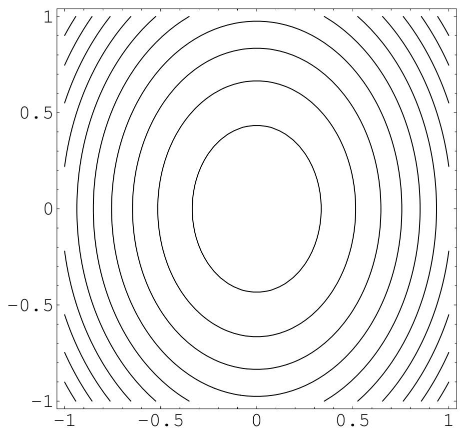


**Bild 1 c)** $5x^2 + 3y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

d) $f(x,y) = \sin(6x) + 2y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (6\cos(6x), 2)^T$
Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('sin(6*x)+2*y',[-1,1,-1,1])
```

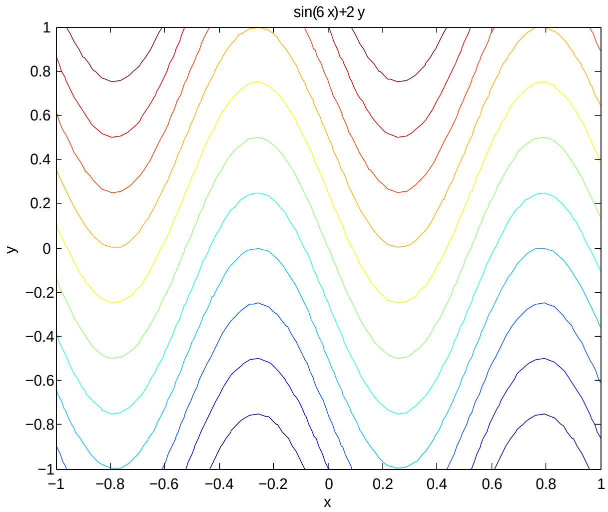


**Bild 1 d)** $\sin(6x) + 2y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - 4y$ .

a) Man berechne von $f$ alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4,4] \times [-2,2]$.

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene $f$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2,0)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von $f$ an, die durch den Punkt $(2,0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel $\alpha$ zwischen $\operatorname{grad} f(2,0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von $f$ im Punkt $(2,0)$.

**Lösung:**

a) $f(x,y) = x^2 - 4y \,, \quad f_x(x,y) = 2x \,, \quad f_y(x,y) = -4 \,,$

$f_{xx}(x,y) = 2 \,, \quad f_{xy}(x,y) = 0 \,, \quad f_{yy}(x,y) = 0 \,,$

$f_{xxx}(x,y) = 0 \,, \quad f_{xxy}(x,y) = 0 \,, \quad f_{xyy}(x,y) = 0 \,, \quad f_{yyy}(x,y) = 0$

b) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('x^2-4*y',[-4,4,-2,2])
```

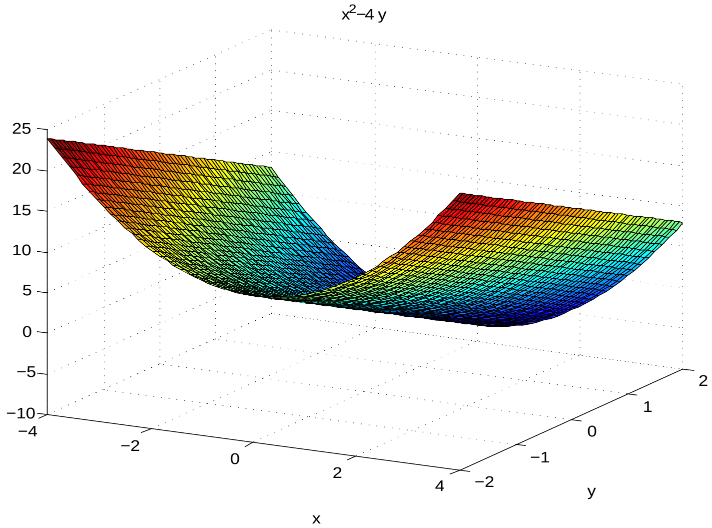


**Bild 2** $f(x,y) = x^2 - 4y$

c) $f(2,0) = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4\,, \quad f_x(2,0) = 4\,, \quad f_y(2,0) = -4$

Tangentialebene : $\quad z = 4 + 4(x-2) - 4y$

d) Es ist $f(2,0) = 4$. Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(2,0)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$4 = f(x, y(x)) = x^2 - 4y(x)\,.$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ . Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x^2}{4} - 1 \end{pmatrix}\,.$$

e) $\mathrm{grad} f(2,0) = (f_x(2,0), f_y(2,0))^T = (4, -4)^T$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{grad} f(2,0)^T \cdot \mathbf{c}'(2)}{||\mathrm{grad} f(2,0)||_2 \cdot ||\mathbf{c}'(2)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob $f$ im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-5,5] \times [-20,20]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von $f$ und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

**Lösung:**

a) Man betrachte die Nullfolge $\left(\dfrac{1}{k}, 0\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{1/k^4} = 0 \neq 1\,.$$

Die Funktion $f$ ist im Nullpunkt daher nicht stetig.

b)

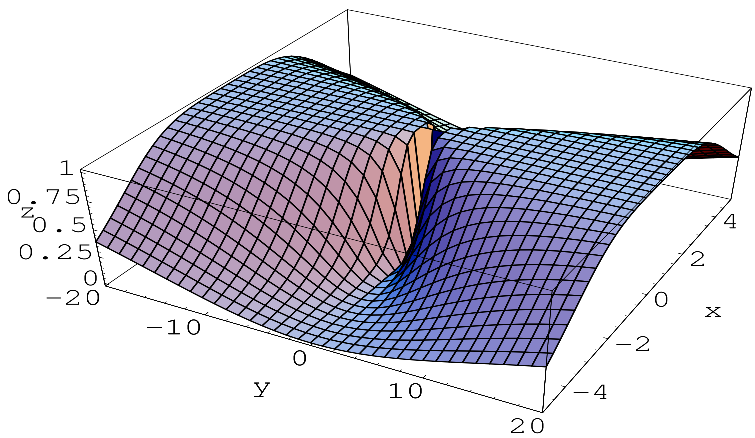


**Bild 3:** $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^4+y^2}$

c) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{-4y^2x^3}{(x^4 + y^2)^2}\,, \qquad f_y(x, y) = \frac{2yx^4}{(x^4 + y^2)^2}$$

für $(x, y) = (0, 0)$ gilt:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 1}{h} \qquad \text{existiert nicht}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

d) Man betrachte die Nullfolge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$, um zu überprüfen, ob die partielle Ableitung $f_y$ im Nullpunkt unstetig ist.

$$\lim_{k \to \infty} f_y\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{2/k^6}{(1/k^4 + 1/k^4)^2} = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{2} = \infty$$

Damit ist die partielle Ableitung $f_y$ im Nullpunkt nicht stetig.

**Differentialoperatoren für reellwertige Funktionen:**

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$$

**Nabla-Operator $\nabla$:**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{mit} \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^T = (\text{grad} f(\boldsymbol{x}))^T$$

**Laplace-Operator:**

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{mit} \quad \Delta f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = < \nabla, \nabla f(\boldsymbol{x}) >$$

**Beispiele für partielle Differentialgleichungen:**

| | |
|---|---|
| Wellengleichung: | $u_{tt} = \Delta u$ |
| Wärmeleitungsgleichung: | $u_t = \Delta u$ |
| Laplace-Gleichung: | $\Delta u = 0$ |

Dabei bezieht sich $\Delta u$ nur auf die Ortsvariablen von $u$, für $n = 2$ bedeutet dies beispielsweise $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

**Aufgabe 4:**

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion
$$u(x, y, t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion
$$u(x, y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$
die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

**Lösung:**

a) $u(x, y, t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_t(x, y, t) = -5\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_x(x, y, t) = \cos(x)\sin(2y)e^{-5t}$ , $u_y(x, y, t) = 2\sin(x)\cos(2y)e^{-5t}$

$u_{xx}(x, y, t) = -\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$ , $u_{yy}(x, y, t) = -4\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

Damit löst $u$ die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ .

b) $u(x, y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

$u_x(x, y) = n(\cos(nx) - 2\sin(nx))\sinh(ny)$ ,
$u_y(x, y) = n(\sin(nx) + 2\cos(nx))\cosh(ny)$

$u_{xx}(x, y) = -n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$ ,
$u_{yy}(x, y) = n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

Damit löst $u$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ .