

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 6

Aufgabe 1:

a) Für die Funktion

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 6 - 2x + 4y$$

mit $Q := [0, 3] \times [0, 2]$ berechne man

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender äquidistanter Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i, j = 1, \dots, n$$

wobei $x_i = \frac{3i}{n}$ und $y_j = \frac{2j}{n}$ gelte

(ii) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

b) (i) Man zeichne den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\int_P x \, d(x, y)$

Aufgabe 2:

Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2$, $0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3:

- a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G .

- b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ mit der Kurve

$$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: 20.1.2023